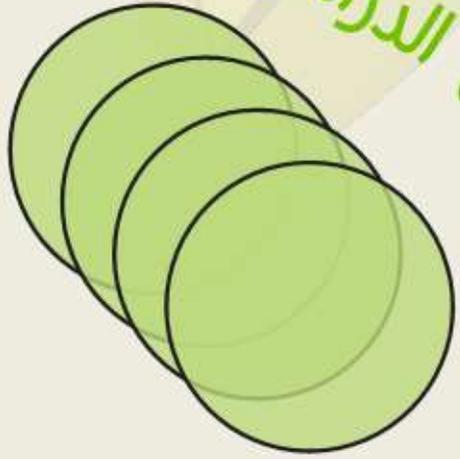


الصف الثاني عشر  
الفصل الدراسي الأول



✉ haah959@gmail.com

📷 hamad\_alrudini



الرياضيات البتة

الصف الثاني عشر الوحدة الأولى

النهايات والاتصال

قناة الأستاذ : حمد الرديني

التعليمية على اليوتيوب

## الرياضيات البحتة الصف الثاني عشر الفصل الدراسي الأول نهاية الدالة عند نقطة

### تصريف

إذا كانت د (س) معرفة على الفترة [ س٠ ج ] وكانت  $\lim_{س \rightarrow س٠} د(س) = ل$  وكانت  $\lim_{س \rightarrow س٠} د(س) = ل$  فإن نهاية د (س) عندما س  $\leftarrow$  تساوي ل إذا وفقط إذا كانت نهايتها من اليمين ومن اليسار عند س  $\leftarrow$  متساويتين وكل منهما تساوي ل .  
وتكتب بالرموز:

$$\lim_{س \rightarrow س٠} د(س) = ل \iff \lim_{س \rightarrow س٠} د(س) = ل = \lim_{س \rightarrow س٠} د(س) = ل$$

### مثال ١

سنبحث عن نهاية الدالة ف(ن) عندما تقترب ن من ٤

### الحل

تدرجت كرة على طريق مائل بحيث كان بعدها بالأمتار عن نقطة البداية بعد ن ثانية :

$$ف(ن) = ٤ن + ٦ن^٣$$

أوجد نهاية الدالة ف(ن) عندما تقترب ن من ٤ لوإن .

نلاحظ أن:

$$\lim_{ن \rightarrow ٤} ف(ن) = ٧٦$$

$$\lim_{ن \rightarrow ٤} ف(ن) = ٧٦$$

$$\lim_{ن \rightarrow ٤} ف(ن) = \lim_{ن \rightarrow ٤} ف(ن)$$

$$\therefore \lim_{ن \rightarrow ٤} ف(ن) = ٧٦$$

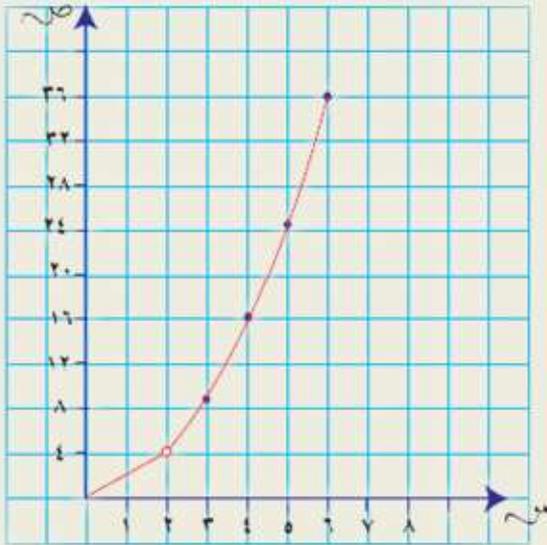
من هذا المثال نلاحظ أن نهاية ف(ن) موجودة .

### جدول (٢)

| ف(ن)                   | ن      | ف(ن)                   | ن      |
|------------------------|--------|------------------------|--------|
| ٥٣,٤٦                  | ٣,٤٦   | ١٠٢,٤٦                 | ٤,٧    |
| ٦٩,١٦                  | ٣,٨    | ٨٣,١٦                  | ٤,٢    |
| ٧٢,٥٤                  | ٣,٩    | ٧٩,٥٤                  | ٤,١    |
| ٧٥,٦٥٠٤                | ٣,٩٩   | ٧٦,٣٥٠٤                | ٤,٠١   |
| ٧٥,٩٩٦٥٠٠٠٤            | ٣,٩٩٩٩ | ٧٦,٠٠٣٥٠٠٠٤            | ٤,٠٠٠١ |
| ن تقترب من ٤ من اليسار |        | ن تقترب من ٤ من اليمين |        |

## الرياضيات البحتة الصف الثاني عشر الفصل الدراسي الأول نهاية الدالة عند نقطة

### مثال ٢



(أ) بيان هذه الدالة يوضح في الشكل:

إذا كانت:  $\left. \begin{array}{l} ٢ \geq ٠, \text{ س} \\ ٢ > ٠, \text{ س} \end{array} \right\} = \text{د(س)}$  **الحل**

$\left. \begin{array}{l} \text{نهاية د(س)} \\ \text{نهاية د(س)} \end{array} \right\} = \text{د(س)}$

$\left. \begin{array}{l} \text{نهاية د(س)} \\ \text{س} < ٢ \end{array} \right\} = \text{د(س)}$

(أ) ادرس نهاية د(س)

(ب) أوجد قيمة د(٢)

ب) لاحظ أن قيمة د(٢) غير موجودة لأن الدالة غير معرفة عند س=٢

∴ نهاية د(س) = ٤

### نتيجة

إن وجود نهاية الدالة عندما  $s \rightarrow P$  لا يعني بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند  $s = P$ .  
والعكس إذا كانت الدالة معرفة عند  $s = P$  فهذا لا يعني وجود النهاية.

الرياضيات البحتة الصف الثاني عشر الفصل الدراسي الأول نهاية الدالة عند نقطة

(3 - s)



تدريب

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \neq 3- \\ \text{س} \neq 3- \end{array} \right\} \text{إذا كانت د(س) = ك}$$

وكان د(3-) = نهـا<sub>3-←س</sub> د(س)

فأوجد قيمة ك .

الحل

$$\text{نهـا}_{3-←س} = \frac{9-2\text{س}}{3+\text{س}}$$

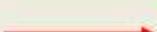
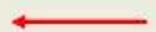
$$\text{نهـا}_{3-←س} = \frac{9-2\text{س}}{3+\text{س}} = \frac{(3-\text{س})(3+\text{س})}{(3+\text{س})} \text{نهـا}_{3-←س}$$

$$\text{نهـا}_{3-←س} = (3-\text{س}) \text{نهـا}_{3-←س}$$

$$\text{نهـا}_{3-←س} = \frac{(9-2\text{س})}{3+\text{س}}$$

$$\text{نهـا}_{3-←س} = (3-\text{س}) \text{نهـا}_{3-←س}$$

$$\text{ك} = 3-$$



الرياضيات البحتة الصف الثاني عشر الفصل الدراسي الأول نهاية الدالة عند نقطة



$$1 - \text{نها س}^3 + 2$$

$$3 = 2 + 1 =$$

$$2 - \text{نها س}^0 + 4$$

$$40 = 8 + 32 = 2 \times 4 + 2 =$$

ونؤكد دائماً أن :  $\text{نها س}^0 \neq \text{نها س}^1$  فهذا يعني أن :  $\text{نها س}^1$  غير موجودة

أوجد :  $1 - \text{نها س}^3 + 2$   
 $2 - \text{نها س}^0 + 4$

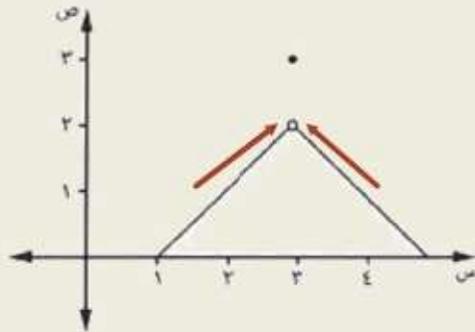
الحل

الأصل في النهاية هو التعويض المباشر، فإذا كان الناتج رقماً فإنه هو المقدار النهائية . ويمكن تعميم ذلك على جميع أنواع كثيرات الحدود.

# الرياضيات البحتة الصف الثاني عشر الفصل الدراسي الأول نهاية الدالة عند نقطة



## تمرين ٢



من الشكل المجاور نهاية د (س) =

١  ٢

٣  غير موجودة

من خلال الرسم نلاحظ بأن :

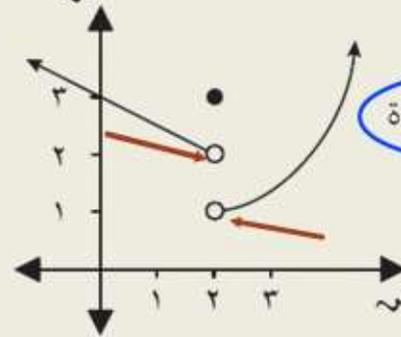
$$\lim_{s \rightarrow 3^-} f(s) = 2 \quad , \quad \lim_{s \rightarrow 3^+} f(s) = 2$$

$$\therefore \lim_{s \rightarrow 3^-} f(s) = \lim_{s \rightarrow 3^+} f(s) = 2$$

وبالتالي فإن النهاية موجودة

## تمرين ١

إذا كان الشكل المجاور يمثل بيان الدالة د(س)، فإن نهاية د(س) تساوي:



١  ٢   
٣  غير موجودة

من خلال الرسم نلاحظ بأن :

$$\lim_{s \rightarrow 2^-} f(s) = 2 \quad , \quad \lim_{s \rightarrow 2^+} f(s) = 1$$

$$\therefore \lim_{s \rightarrow 2^-} f(s) \neq \lim_{s \rightarrow 2^+} f(s)$$

وبالتالي فإن النهاية غير موجودة