



✉ haah959@gmail.com

📷 hamad_alrudini

الرياضيات البتة

للصف الأول الوحدة الأولى

النهايات والاتصال

قناة الأستاذ : حمد الرديني

التعليمية على اليوتيوب

الرياضيات البحتة الصف الثاني عشر الفصل الدراسي الأول اتصال الدالة على فترة

حتى تكون الدالة متصلة على فترة لا بد أن تكون متصلة عند كافة النقاط على هذه الفترة

نظرية

١. الدالة الحدودية المعرفة على الفترة $[أ، ب]$ تكون متصلة على جميع نقاط $[أ، ب]$.

٢. تكون الدالة متصلة على الفترة $[أ، ب]$ إذا كانت :

أ. $د (س)$ متصلة على الفترة $[أ، ب]$.

ب. $نهاية(س) = (أ)س$ ، $نهاية(س) = (ب)س$

$$\begin{array}{c} \text{نهاية} \\ \leftarrow \text{س} \end{array} = (أ-)\text{س}$$

$$\begin{array}{c} \text{نهاية} \\ \leftarrow \text{س} \end{array} = (أ)\text{س}$$

لاحظ

مثال : ابحث اتصال الدالة $د(س) = ٣ - س - س^٢$ في الفترة $[٤، -٤]$

الحل :: $د(س)$ دالة حدودية مجالها ح

:: $[٤، -٤] \subseteq ح$:: $د(س)$ متصلة على الفترة $[٤، -٤]$

لذلك تم تضمين الأطراف

الرياضيات البحتة الصف الثاني عشر الفصل الدراسي الأول اتصال الدالة على فترة



مثال

أوجد قيمة ب التي تجعل د (س) متصلة على مجالها :

$$d(s) = \begin{cases} \frac{s^2 - 2b}{s - b} & s \neq b \\ 0 & s = b \end{cases}$$

الحل

∴ د (س) متصلة عند س = ب ← فإن :

$$s(b) = \lim_{s \rightarrow b} \frac{s^2 - 2b}{s - b} \leftarrow \lim_{s \rightarrow b} \frac{s^2 - 2b}{s - b} = \lim_{s \rightarrow b} \frac{(s-b)(s+b)}{(s-b)}$$

$$\lim_{s \rightarrow b} (s+b) = b+b = 2b = 0 \leftarrow \therefore 2b = 0$$

$$\therefore b = 0$$

ابحث اتصال الدالة : $d(s) = \begin{cases} s^2 + s + 1 & s > 1 \\ s^3 & s \leq 1 \end{cases}$ على مجالها

الحل

١] $s(1) = 3$

٢] $\lim_{s \rightarrow 1^+} d(s) = 3$

$\lim_{s \rightarrow 1^-} d(s) = 3$

∴ $\lim_{s \rightarrow 1} d(s) = 3 = d(1)$

الاتصال	الفترة	الدالة
حدودية متصلة	$]-\infty, 1[$	$s^2 + s + 1$
حدودية متصلة	$]1, \infty[$	s^3

* نبحث اتصال الدالة عند س = 1

∴ د (س) متصلة على مجالها

الرياضيات البحتة الصف الثاني عشر الفصل الدراسي الأول اتصال الدالة على فترة



مثال

ابحث اتصال الدالة : $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & 3 \geq x \\ \frac{9 - x^2}{3 - x} & 3 > x > 0 \\ 2 + x & 0 \leq x \end{cases}$ على مجالها

الحل

١

الاتصال	نوع الدالة	الفترة	الدالة
متصلة	حدودية	$]3, \infty[$	$3 - x^2$
متصلة	نسبية	$]0, 3[$	$\frac{9 - x^2}{3 - x}$
متصلة	خطية	$]0, \infty[$	$2 + x$

٢ نبحث اتصال الدالة عند $x = 3$

١ $f(3) = 6$

٢ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6$ ، $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6$

$\therefore f(x)$ متصلة عند $x = 3$

٣ نبحث اتصال الدالة عند $x = 0$

١ $f(0) = 2$

٢ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 8$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$

$\therefore f(x)$ غير متصلة عند $x = 0$

$\therefore f(x)$ متصلة عند $x = 0$

الرياضيات البحتة الصف الثاني عشر الفصل الدراسي الأول اتصال الدالة على فترة



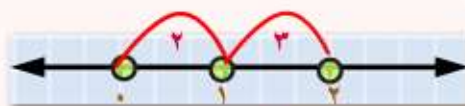
تدريب

$$\left. \begin{array}{l} 1 > s \geq 0 \\ 2 > s \geq 1 \end{array} \right\} = [2 + s]$$

ابحث اتصال الدالة : $f(s) = \left\{ \begin{array}{l} s^2 - s + 3 \\ 2 + s \\ s - 5 \end{array} \right.$ على مجالها

الحل

$$\left. \begin{array}{l} s^2 - s + 3 \\ 2 + s \\ s - 5 \end{array} \right\} = f(s)$$



نبحث اتصال الدالة عند $s = 1$

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} f(s) = 3 \quad \lim_{s \rightarrow 1^+} f(s) = 3 \quad f(1) = 3$$

$$\therefore \lim_{s \rightarrow 1^-} f(s) = \lim_{s \rightarrow 1^+} f(s) = f(1) = 3$$

د (س) متصلة عند $s = 1$

الاتصال	نوع الدالة	الفترة	الدالة
متصلة	حدودية	$]0, 1[$	$s^2 - s + 3$
متصلة	ثابتة	$]1, 2[$	3
متصلة	خطية	$]2, \infty[$	$s - 5$

الرياضيات البحتة الصف الثاني عشر الفصل الدراسي الأول اتصال الدالة على فترة



تدريب

$$\left. \begin{array}{l} 5 < s < 3 + s^2 \\ 5 > s < 6 + s \end{array} \right\} = (s) \text{ ادرس اتصال الدالة على مجالها :}$$

الحل

١. في الفترة $[5, \infty)$ خطية متصلة
٢. في الفترة $]-\infty, 5]$ خطية متصلة
٣. عند $s = 5$
- د (٥) غير معرفة وبالتالي فإن الدالة غير متصلة عند $s = 5$
- ∴ د (٥) متصلة على $]-\infty, 5]$

تدريب

ابحث اتصال الدالة على مجالها : $h(s) = \frac{1}{s^2 - 9}$

الحل

- * البسط : دالة ثابتة متصلة
- * المقام: $s^2 - 9 = 0 \leftarrow s = \pm 3$
- ∴ د (س) غير متصلة عند $s = 3, -3$
- ∴ هـ (س) متصلة على $]-\infty, -3) \cup]-3, 3) \cup]3, \infty[$

الرياضيات البحتة الصف الثاني عشر الفصل الدراسي الأول اتصال الدالة على فترة



١. مجال الدالة الحدودية هو ح

٢. مجال الدالة النسبية هو ح - أصفار المقام

٣. مجال الدالة هـ (س) تحت الجذر التربيعي هو : هـ (س) ≤ ٠

نظريات في الاتصال

إذا كانت د (س) ، هـ (س) دالتين متصلتين على الفترة [ا، ب] فإن :

١. $s \pm h(s)$ متصلة على الفترة [ا، ب]

٢. $s \times h(s)$ متصلة على الفترة [ا، ب]

٣. $\frac{s}{h(s)}$ متصلة على الفترة [ا، ب] حيث ، هـ (س) ≠ ٠

٤. $\overline{s \vee h(s)}$ متصلة ، حيث $s \leq ٠$

الرياضيات البحتة الصف الثاني عشر الفصل الدراسي الأول اتصال الدالة على فترة



تمرين

أوجد الفترات التي تكون فيها د (س) متصلة :

$$D(s) = \frac{\sqrt{1+s^2}}{3+|s|}$$

١. البسط : $1+s^2 \geq 0 \iff$ متصلة على \mathbb{R}

٢. المقام : $3+|s| \neq 0 \iff$ متصلة على \mathbb{R}

$\therefore D(s)$ متصلة على \mathbb{R}

أوجد الفترات التي تكون فيها د (س) متصلة :

$$D(s) = \frac{\sqrt{s^2-9}}{s^2-3}$$

الحل

١. البسط : $s^2-9 \geq 0 \iff s \leq -3 \text{ أو } s \geq 3$

$\therefore -3 \leq s \leq 3$

٢. المقام : $s^2-3 \neq 0 \iff s \neq \pm\sqrt{3}$ ، $s \neq 0$ ، $s \neq 1$

$\therefore D(s)$ متصلة على $[-3, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3]$

الرياضيات البحتة الصف الثاني عشر الفصل الدراسي الأول اتصال الدالة على فترة



تمرين

إذا كان : $f(s) = \frac{7s^2 + 2s}{5s^2 - 1s + 4}$ متصلا على ح
فما قيمة f

الحل

لكي تكون هذه الدالة متصلة ، فلا بد أن يكون المقام ليس له أصفار .
وهذا يعني أن يكون المميز $>$ صفر أي أن : $b^2 - 4ac > 0$

$$0 > 80 - 21 \Leftrightarrow 0 > 4 \times 5 \times 4 - 21 \therefore$$

$$80 > 21 \Leftrightarrow 80 > 21 \Leftrightarrow$$

$$80 > 21 > 80 > 21 \therefore$$

$$\therefore] 80 > 21 , 80 > 21 - [\ni 1$$

تمرين

من الرسم المجاور ، أوجد قيم s التي يكون عندها $d(s)$ غير متصل ، مع ذكر السبب :

الحل

1. نقاط الانفصال هي :

$$s \in \{-2, -1, 2\}$$

السبب :

1. عند : $s = -2$ النهاية غير موجودة .

2. عند : $s = -1$ نهاية $f(s) \neq f(-1)$

3. عند : $s = 2$ d غير معرفة .

