



الرياضيات الابتدائية

الوحدة الثانية

التفاضل وتطبيقاته

الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الأول

الرياضيات الابتدائية

haash959@gmail.com
hamad_alrudini



القيم القصوى

الفصل الدراسي الأول

الصف الثاني عشر

الرياضيات الابتدائية

مثال

إذا كان : $d(s) = s^2 - 5s + 7$ $s \in [1, 2]$
فأوجد قيمة s الحرجية

الحل

$$d'(s) = 2s - 5 \quad s = 2,5$$

$$\therefore d(2,5) = (2,5)^2 - 2,5 \times 5 + 7 = 0$$

\therefore عند $s = 2,5$ توجد نقطة حرجية لأن : $d'(2,5) = 0$.

عند $s = 1$ توجد نقطة حرجية لأن : $d'(1)$ غير موجودة

المشقة عند أطراف الفترات المتقطعة غير موجودة

\therefore قيم s الحرجية : $\{1, 2,5\}$

النقطة الحرجية

تعتبر النقطة $(s, d(s))$ نقطة حرجية للدالة $d(s)$
إذا كانت :

$d'(s) =$ صفر أو غير موجودة [نشق ونسلوي بالصفر]

مثال

إذا كان : $d(s) = s^2 - 6s + 6$ فأوجد النقطة الحرجية

الحل

$$d'(s) = 2s - 6 \quad s = 3$$

\therefore نعرض قيمة $s = 3$ في الدالة

$$\therefore d(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 6 = 9 - 18 + 6 = -3$$

$= -3$

\therefore النقطة الحرجية $(3, -3)$

٢٩٥١٠٩٤٣٧٦٥٢٠١٣٣

الرياضيات البحتة

الصف الثاني عشر

مثال
 $d(s) = \frac{1}{2}s^2 - s + 3$ []
 أوجد قيمة s من الحرج

الحل

$$d'(s) = s^2 - 1$$

$$s = \pm 1$$

[] تسبّب

.. مجموعه قيم s الحرج هي :

$$\{5, 1, 0\}$$

مثال

إذا كانت $d(s) = 3s^2 + 1$

فأوجد قيم s إذا وجدت أن $d(s)$ له قيمة حرج عند $s = 1$

الحل

$$d'(s) = 6s + 2$$

$$\text{صفر} = -9$$

$$s = -\frac{9}{6}$$

مثال

إذا علمنا أن :

$d'(s) = \frac{s-5}{2s+1}$

أوجد قيم s التي يوجد عندها تقطع حرج

الحل

نقطة حرج

$$d'(s) = \frac{s-5}{2s+1}$$

$$s = 5$$

$$d'(s) = \text{غير موجودة}$$

$$s = -\frac{1}{2}$$

$$\text{المعلم} = \text{صفر}$$

الصف الثاني عشر



الفصل الدراسي الأول



قناة الأستاذ : محمد المردuni

التعليمية على اليوتيوب

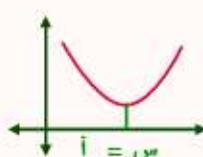
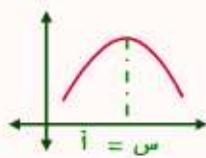


الرياضيات البحتة

الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الأول

القيم القصوى



إذا كانت $d'(s)$ معرفة على فترة ما فإن :

أ. للدالة $d(s)$ قيمة عظمى محلية عند s = 1 إذا تحولت الدالة من متزايدة إلى متناقصة عند تلك النقطة .

ب. للدالة $d(s)$ قيمة صغرى محلية عند s = 1 إذا تحولت الدالة من متناقصة إلى متزايدة عند تلك النقطة .

ملاحظات

١. القيم المطلقة والصغرى تسمى قيم قصوى محلية .

٢. عند نقطة القيمة القصوى (عظمى أو صغرى) تكون المشقة إما مسلوبة للصفر أو غير موجودة ، وبالتالي فإن قيمة s عند القيم القصوى تعتبر قيم حرجية .

٣. القيم القصوى المطلقة يمكن أن تحدث عند أطراف الفترات أو داخلها بينما القيم القصوى المحلية تحدث فقط داخل الفترات .

٤. القيم العظمى المطلقة : هي أكبر القيم المطلقة في الفترة .

٥. القيم الصغرى المطلقة : هي أصغر القيم المطلقة في الفترة .

القيم القصوى

الفصل الدراسي الأول

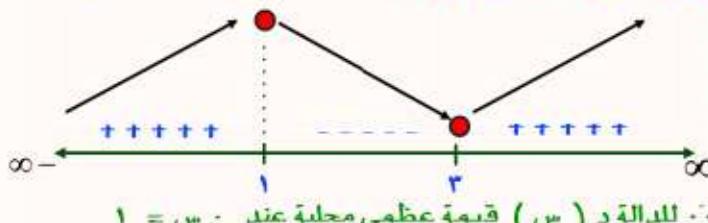
الصف الثاني عشر

الرياضيات البحتة

١. مثال
أوجد القيم القصوى المحلية : $s^2 - 6s + 9$

الحل

$$d'(s) = 3s^2 - 12s + 9 = 3(s-3)^2$$



للدالة $d(s)$ قيمة عظمى محلية عند : $s = 1$
مقدارها : $d(1) = 1 - 6 + 9 = 4$

وقيمة صغرى محلية عند : $s = 3$
مقدارها : $d(3) = 3 \times 9 - 6 \times 9 + 9 = 0$ صفر

خطوات حل المسألة

أ. توجد المشقة $d'(s)$

ب. توجد قيم من الحرجية والتي عندها $d'(s) = 0$ صفر أو غير موجودة .

ج. ندرس إشارة $d'(s)$ لتحديد التزايد والتناقص .

د. إذا تحولت الدالة $d(s)$ من متزايدة إلى متناقصة فإنها تمر بقيمة عظمى .

هـ. إذا تحولت الدالة من متناقصة إلى متزايدة فإنها تمر بقيمة صغرى .

٢٩
٢٦
٢٣
٢٠
١٧
١٤
١١
٨
٥
٢
٠

الرياضيات البحتة

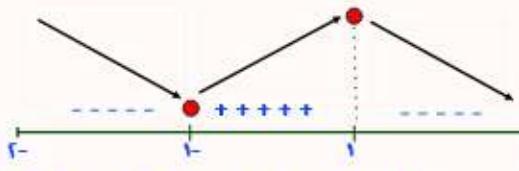
تدريب $d(s) = s^3 - s^2$ $s \in [2, 3]$

$$\text{الحل } d'(s) = 3s^2 - 2s$$

$$d'(s) = 3s^2 - 2s$$

$$d'(s) = 3s^2 - 2s$$

$$d'(s) = 3s^2 - 2s$$



عند $s = 1$ (صغرى محلية) مقدارها: $d(1) = 1$

عند $s = 3$ (عظمى محلية) مقدارها: $d(3) = 22$

دالة مطلقة

$d(3) = 22$ عظمى مطلقة

$d(1) = 1$ صغرى مطلقة

القيم القصوى

الفصل الدراسي الأول

الصف الثاني عشر

١ تدريب لتقىن د (س) = ٢ س٢ - ٦ س - ٦ من - ٦ من + ٧ س $\in [-5, 5]$

أوجد : (١) قيم من الحرجة (٢) مجالات التزايد والتتناقص

(٣) القيم القصوى المحلية والمطلقة

الحل

$$d'(s) = 4s - 6 \quad d''(s) = 4$$

$$d'(s) = 4s - 6 \quad d''(s) = 4$$



[٣ - ١] متزايدة $d(3) = 22$ [١ - ٥] متناقصة

$s = 1$ توجد قيمة عظمى محلية $d(1) = 1$

$s = 3$ توجد قيمة صغرى محلية $d(3) = 22$

$d(-5) = -48$ صغرى مطلقة $d(5) = 81$ عظمى مطلقة

M haash959@gmail.com

hamad_alrudini

الرياضيات البحتة

الوحدة الثانية

التفاضل وتطبيقاته

قناة الأستاذ : محمد الرديني

التعليمية على اليوتيوب



الرياضيات البحتة

الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الأول

القيم القصوى

تدريب

$$d(s) = 6s^2 - s^3$$

أوجد القيم القصوى باستخدام المشقة الثانية

الحل

$$d'(s) = 12s - 3s^2$$

$$3s(4-s) = 0$$

$$s = 0 \quad s = 4$$

$$d''(s) = 12 - 6s$$

$$d''(0) = 12 > صفر \leftarrow \text{قيمة صغرى محلية}$$

$$d''(4) = 4 - 12 < صفر \leftarrow \text{قيمة عظمى محلية}$$

$$d(4) = 24$$

استخدام المشقة الثالثة لاختبار القيم الصغرى والعظمى

إذا كانت نتيجة تعميض s الحرجة في $d''(s)$:

* سالبة : فإنه توجد قيمة عظمى

* موجبة : فإنه توجد قيمة صغرى

* من عيوب هذه الطريقة أنها لا تستطيع تحديد القيم عندما تكون $d''(s) = 0$.

$$\text{مثال } d(s) = s^3 - 3s + 5$$

أوجد القيم القصوى باستخدام المشقة الثانية

$$\text{الحل } d'(s) = 3s^2 - 2 \leftarrow s = 1$$

$$d''(s) = 6 \leftarrow \text{موجبة} \leftarrow \text{توجد قيمة صغرى}$$

القيم القصوى

الفصل الدراسي الأول

الصف الثاني عشر

الرياضيات البحتة

ملاحظة

باستخدام الرسم للدالة : $d'(s)$:

(١) النقاط الحرجة توجد عند $d'(s) = صفر$

(أي عندما تقطع الدالة محور السينات)

(٢) تكون $d(s)$ متزايدة إذا كانت $d'(s) > صفر$

(فوق محور السينات)

(٣) تكون $d(s)$ متناقصة إذا كانت $d'(s) < صفر$

(تحت محور السينات)

مثال

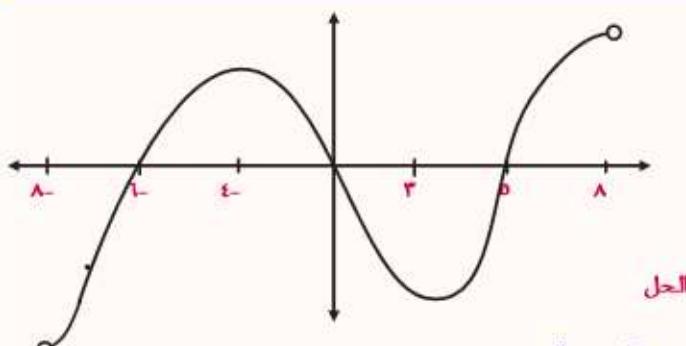
الشكل المجلول يمثل $d'(s)$ حيث $d(s)$ متصل

على $[8, -8]$:

أوجد قيم s الحرجة .

أوجد فترات التزايد والتلاقص للدالة $d(s)$.

جد قيم s التي يوجد عندها قيمًا قصوى محلية مبينًا نوعها



١. قيم s الحرجة : $-7, -5, 0, 4$

$$d'(s) = 0 \quad d'(s) \text{ غير موجودة}$$

$$٢. \text{ متزايدة } [0, 0] \cup [4, \infty) \quad \text{متناقصة } [-\infty, -4] \cup [-2, 0]$$

$$٣. \text{ } s = -6 \quad \text{صفرى محلية} \quad s = 0 \quad \text{عظمى محلية}$$

$$٤. \text{ } s = 5 \quad \text{صفرى محلية}$$