الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الأول

haah959@gmail.com

hamad_alrudini

الرياضيات البحتة

الوحدة الأولى

النهايات والاتصال

قناة الأستاذ : حمد الرديني

التعليمية على اليوتيوب

اتصال الدالة عند نقطة

لتكن الدالة د(س) معرفة على الفترة [جـ ، د] ، ولتكن أ ∈] جـ ، د [

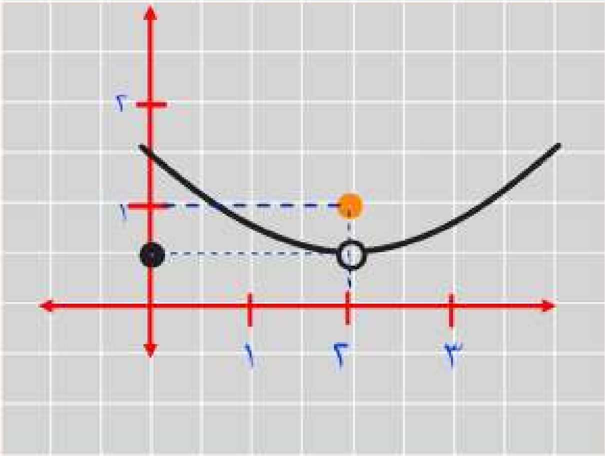
فنقول أن د(س) متصلة عند س = أ إذا تحقق الشرط التالي : د(أ) = نهـــا د(س) عندما س ← أ

وهذا يعني :

1. نهـــا د(س) عندما س ← أ ⟵ موجودة
2. د(أ) ⟵ معرفة وموجودة
3. د(أ) = نهـــا د(س) عندما س ← أ

مثال

نلاحظ من خلال الشكل أن :



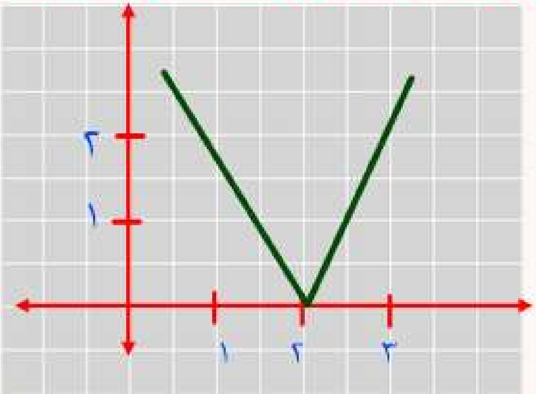
1. د(٢) = ١
2. $\lim\limits_{س \to ٢^+}$ د(س) = $\frac{١}{٢}$ ، $\lim\limits_{س \to ٢^-}$ د(س) = $\frac{١}{٢}$ ∴ $\lim\limits_{س \to ٢}$ د(س) = $\frac{١}{٢}$

∵ د(س) = ١ ، $\lim\limits_{س \to ٢}$ د(س) = $\frac{١}{٢}$

3. ∴ د(س) ≠ $\lim\limits_{س \to ٢}$ د(س)

∴ د (س) غير متصلة عند س = أ أو س = ٢ وتسمى نقطة انفصال

مثال نلاحظ من خلال الشكل أن :



1. د(أ) = ٠
2. $\lim\limits_{س \to أ^+}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to أ^-}$ د(س) = ٠
3. ∵ د(أ) = $\lim\limits_{س \to أ}$ د(س) = ٠

فهذا يعني أن د (س) متصلة عند س = أ

يمكن أن نستنتج أن :

١. إذا كانت د (أ) = جـ ، وكانت : نهـا $_{س \to أ}$ د(س) = جـ $\Leftarrow$ د(س) متصلة عند س = أ

٢. إذا كانت د (أ) غير معرفة ، وكانت : نهـا $_{س \to أ}$ د(س) = جـ $\Leftarrow$ د(س) غير متصلة عند س = أ

٣. إذا كانت د (أ) = جـ ، وكانت : نهـا $_{س \to أ}$ د(س) غير موجودة $\Leftarrow$ د(س) غير متصلة عند س = أ

٤. إذا كانت د (أ) غير معرفة ، وكانت : نهـا $_{س \to أ}$ د(س) غير موجودة $\Leftarrow$ د(س) غير متصلة عند س = أ

مثال

إذا كان : د(س) = $\begin{cases} \sqrt{س^{٢} + ٧} & س < ٣ \\ \frac{١٢}{س} & س = ٣ \\ ٢س - ٢ & س > ٣ \end{cases}$ ابحث اتصال الدالة عند س = ٣

الحل

$\boxed{١}$ د(س) = $\frac{١٢}{٣}$ = ٤

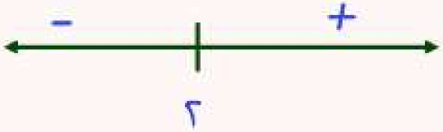
$\boxed{٢}$ $\lim_{س \to ٣^{+}}$ د(س) = $\lim_{س \to ٣^{+}}$ ٢س − ٢ = ٢ × ٣ − ٢ = ٤ ، $\lim_{س \to ٣^{-}}$ د(س) = $\lim_{س \to ٣^{-}} \sqrt{س^{٢} + ٧}$ = $\sqrt{٩ + ٧}$ = ٤

$\boxed{٣}$ ∴ $\lim_{س \to ٣}$ د(س) = ٤ = د(٣) وبالتالي فإن د (س) متصلة عند س = ٣

مثال

ابحث اتصال الدالة |س - ٢| عند س = ٢

الحل نعيد تعريف المطلق



$$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س} - ٢ & \text{س} \geq ٢ \\ ٢ - \text{س} & \text{س} < ٢ \end{cases}$$

$\Leftarrow$ $\boxed{1}$ د(٢) = ٠ $\Leftarrow$ $\boxed{2}$ $\underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهـا}}$ د(س) = $\underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٠

$\therefore$ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٠ = د(٢)

د (س) متصلة عند س = ٢

تدريب لتكن : د(س) = س^{٣} + س^{٢} − ٣ س + ١ ابحث اتصال الدالة عند س = ٢

الحل $\Leftarrow$ د(٢) = ٢^{٣} + ٢^{٢} − ٣ × ٢ + ١ $\Leftarrow$ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٧ $\Leftarrow$ $\therefore$ د (س) متصلة عند س = ٢

= ٧

نتيجة : كثيرات الحدود متصلة على ح

تمرين

ابحث اتصال الدالة د (س) عند س = ٣

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣} & \text{س} \neq ٣ \\ ٥ & \text{س} = ٣ \end{cases}$$

الحل

$\boxed{١}$ $\text{د}(٣) = ٥$

$\boxed{٢}$ $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣} = \underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}+٣)(\text{س}-٣)}{\text{س} - ٣} = ٦$

$\boxed{٣}$ $\because \underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) \neq \text{د}(٣)$

فإن د (س) غير متصلة عند س = ٣

تمرين إذا كانت د (س) متصلة عند س = ١

فأوجد قيمتي : أ ، ب

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ} + \text{ب}\,\text{س}^{٢} & \text{س} > ١ \\ ٣ & \text{س} = ١ \\ ٢\text{ب} - \text{أ}\,\text{س} & \text{س} < ١ \end{cases}$$

الحل

$\because$ متصلة عند س = ١ $\therefore \underset{\text{س}\leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س}\leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) = \text{د}(١)$

$\therefore ٣ = \underset{\text{س}\leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} \text{أ} + \text{ب}\,\text{س}^{٢} \leftarrow ٣ = \text{أ} + \text{ب}$ .... (١)

$٣ = \underset{\text{س}\leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}} ٢\text{ب} - \text{أ}\,\text{س} \leftarrow ٣ = ٢\text{ب} - \text{أ}$ .... (٢)

بالجمع

$\therefore ٦ = ٣\text{ب} \leftarrow \text{ب} = ٢$ ومن المعادلة ١ أو ٢ $\leftarrow \text{أ} = ١$

تمرين

ابحث اتصال الدالة :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{|س - ٢|}{س - ٢} & س < ٢ \\ [س - ٣] & ٢ \le س < ٣ \\ ٥س^٢ - ٤٦ & ٣ \le س \end{cases}$$

عند س = ٢ ، س = ٣

تمرين

إذا كان :

$$د(س) = \begin{cases} كس + ٣ & س \ge ١ \\ ٧ - كس & س < ١ \end{cases}$$

متصلة عند س = ١ فأوجد قيمة ك