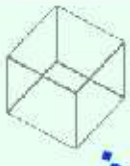


الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الأول

hash959@gmail.com

hamad_alrudini

الرياضيات البحتة

الوحدة الثالثة

الهندسة التحليلية للدائرة

قناة الأستاذ : حمد الرديني

التعليمية على اليوتيوب

إيجاد الوتر المشترك للدائرتين المتقاطعتين

عند نقاط التقاطع تتساوى الدائرتان ، وبالتالي
إذا ساوينا الدائرتين مع بعضهما تكون معادلة المستقيم
الناتج هي معادلة الوتر المشترك .

مثال

أوجد معادلة الوتر المشترك للدائرتين :

$س^2 + ص^2 - ٤س - ٢ص + ١ = ٠$

$س^2 + ص^2 + ٤س - ٦ص - ١٠ = ٠$

الحل

$س^2 + ص^2 - ٤س - ٢ص + ١ = س^2 + ص^2 + ٤س - ٦ص - ١٠$

$-٨س + ٤ص + ١١ = ٠$

$٨س - ٤ص - ١١ = ٠$

مثال

أثبت أن الخط المستقيم : $س - ص - ٣ = ٠$ هو مماس مشترك للدائرتين :

$س^2 + ص^2 - ٢س - ٤ص - ٣ = ٠$

$س^2 + ص^2 + ٤س - ٢ص - ١٣ = ٠$

الحل

من معادلة المستقيم : $س = ص + ٣$ نعوض في معادلتي الدائرتين :

[١] $(ص + ٣)^2 + ص^2 - ٢(ص + ٣) - ٤ص - ٣ = ٠$

$٢ص^2 + ٦ص + ٩ - ٢ص - ٦ - ٤ص - ٣ = ٠$

$٢ص^2 + ٠ = ٠$ نعوض عن ص في المعادلة

$ص = ٠$

$س = ٣$

المستقيم يحقق معادلة الدائرة في نقطة واحدة وهي (٣ ، ٠)

[٢] $(ص + ٣)^2 + ص^2 + ٤(ص + ٣) - ٢ص - ١٣ = ٠$

$٢ص^2 + ٦ص + ٩ + ٤ص + ١٢ - ٢ص - ١٣ = ٠$

$٢ص^2 + ٨ص + ٨ = ٠$ نعوض عن ص في المعادلة

$(ص + ٢)(ص + ٢) = ٠$

$ص = -٢$

$س = ١$

المستقيم يحقق معادلة الدائرة في نقطة واحدة وهي (١ ، -٢)

وبالتالي فإن المماس مشترك بين الدائرتين لأنه يمس كل دائرة في نقطة واحدة فقط .

إيجاد معادلة الدائرة بعد إجراء تحويل انسحاب للمركز

مثال أوجد معادلة الدائرة بعد إجراء تحويل انسحاب :
س^{٢} + ص^{٢} - ٤س - ٧ = ٠ : (س ، ص) ← (س + ٤ ، ٢ص - ٥)

الحل

م : قبل الانسحاب : (٢ ، ٠) نق = $\sqrt{١١}$

م : بعد الانسحاب : (٢ + ٤ ، ٢ × ٠ - ٥) = (٦ ، - ٥)

المعادلة : (س - ٦)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ١١

الصورة العامة : جـ = ل^{٢} + ك^{٢} - نق^{٢}

= ٣٦ + ٢٥ - ١١ = ٥٠

س^{٢} + ص^{٢} - ١٢س + ١٠ص + ٥٠ = ٠

ملاحظة : في الصورة العامة للدائرة ، إذا كانت جـ = ٠ فإن الدائرة تمر بنقطة الأصل .

مثال أثبت أن الدائرة : س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + ٦ص + ٤ = ٠
تمس محور السينات

الحل

إذا مست دائرة محور السينات فإن الإحداثي الصادي للمركز
= نصف قطر الدائرة .

∴ م (٢ ، - ٣) نق^{٢} = $\sqrt{٤ - ٩ + ٤}$ = ٣ = |- ٣|

∴ الدائرة تمس محور السينات

مثال رسم من النقطة (٥ ، ٢) الواقعة على الدائرة قطر لهذه الدائرة ، ومن نقطة نهاية القطر الأخرى رسم مماس للدائرة ،
فإذا كانت معادلة المماس : س - ٢ص + ٤ = ٠ ، فاكتب معادلة الدائرة .

الحل نوجد نقطة التماس

ميل المماس = $\frac{١}{٢}$ ⇐ $\left(ص = \frac{١}{٢} س + ٢ \right)$

∴ ميل العمودي على المماس (القطر) = - ٢

∴ معادلة القطر : ص - ص$_{١}$ = م (س - س$_{١}$)

ص = ١٢ - ٢س

∵ نقطة تقاطع القطر مع المماس هي نقطة التماس

∴ $\frac{١}{٢}$ س + ٢ = - ٢س + ١٢

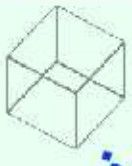
∴ س + ٤ = - ٤س + ٢٤

∴ ٥ س = ٢٠ ← س = ٤

∴ ص = ٤

∴ نقطة التماس (٤ ، ٤)

∴ معادلة الدائرة : س^{٢} + ص^{٢} - ٩س - ٦ص + ٢٨ = ٠



الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الأول

hash959@gmail.com

hamad_alrudini

الرياضيات البحتة

الوحدة الثالثة

الهندسة التحليلية للدائرة

قناة الأستاذ : حمد الرديني

التعليمية على اليوتيوب

إيجاد معادلات المماسات المرسومة من نقطة خارج الدائرة

مثال أكتب معادلات المماس المرسومة من النقطة (٣ ، ٠) للدائرة :
$س^{٢} + ص^{٢} + ٤س - ٥ = ٠$

الحل تعتمد على إيجاد ميل المماس من خلال العلاقة بين المماس ومركز الدائرة والمسافة بينهما ، ثم كتابة المعادلات مباشرة :

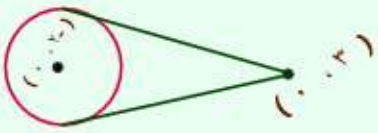
معادلة المماس : $ص - ص_{١} = م (س - س_{١})$

$ص - ٠ = م (س - ٣)$

$ص = م س - ٣م$ ∴ $م س - ص - ٣م = ٠$ (معادلة المماس)

المسافة بين المماس ومركز الدائرة (- ٢ ، ٠) :

$$نق = \frac{|أ س_{١} + ب ص_{١} + ج|}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}} \Leftarrow نق = \frac{|م × -٢ - ٠ - ٣م|}{\sqrt{١ + م^{٢}}}$$



$\Leftarrow$ ∴ $|م ٣ - م ٢ - ٠| = \sqrt{١ + م^{٢}}$ ٣

$|٩م + ٩ - ٥م| = ٩ (م^{٢} + ١)$ ∴ $٢٥ م^{٢}$

$٠ = ٩ + ١٦ م^{٢} -$ $\Leftarrow$ $م^{٢} = \frac{٩}{١٦}$

$م = \pm ٠٫٧٥$

∴ معادلة المماس الأول : $ص = ٠٫٧٥ (س - ٣)$

∴ معادلة المماس الثاني : $ص = - ٠٫٧٥ (س - ٣)$

مثال أكتب معادلات المماس المرسومة من النقطة (٢ ، -١) للدائرة :
$س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س - ٤ ص + ٤ = ٠$

الحل ١. م (٣ ، ٢) ٢. نق $= \sqrt{٩ + ٤ - ٤} = ٣$

٣. معادلة المماس : $ص - ص_{١} = م (س - س_{١})$

$ص + ١ = م (س - ٢)$

$م س - ص - ٢م - ١ = ٠$

٤. نق = المسافة بين النقطة (٣، ٢)
والمماس : $م س - ص - ٢م - ١ = ٠$

$$\frac{|١ - ٢م - ٢ - ٣م|}{\sqrt{١ + م^{٢}}} = ٣$$

$$|٣ - م| = ٣\sqrt{١ + م^{٢}}$$

$٩ م^{٢} - ٦ م + ٩ - ٩ = ٠$

$٨ م^{٢} + ٦ م = ٠ \quad \therefore م (٨م + ٦) = ٠$

$م_{١} = ٠ \qquad م_{٢} = \frac{-٣}{٤}$

∴ المعادلة الأولى : $ص + ١ = ٠ \times (س - ٢)$

$ص = -١$

∴ المعادلة الثانية : $ص + ١ = \frac{-٣}{٤} (س - ٢)$ $\Leftarrow$ $٤ ص + ٤ = -٣ س + ٦$

$\Leftarrow$ $٤ ص + ٣ س - ٢ = ٠$