تدريب

يتحرك جسم حسب العلاقة التالية :

ف (ن) = $\frac{١}{٣}$ ن^{٣} - ٢ ن^{٢} + ٨ ن - ٥

احسب التسارع عندما تكون السرعة تساوي ٢٠ م/ث

الحل

ع (ن) = ن^{٢} - ٤ن + ٨ = ٢٠ ← ن^{٢} - ٤ن - ١٢ = ٠

(ن - ٦) (ن + ٢) = ٠

∴ ن = ٦ ن = - ٢ مرفوض

∴ ت (ن) = ٢ن - ٤ ← ت (٦) = ٢ × ٦ - ٤

= ١٢ - ٤

= ٨ م/ث^{٢}

تدريب قذف جسم رأسياً لأعلى ، فتحرك حسب العلاقة :

ف (ن) = ٦٠ن - ٥ ن^{٢} ، احسب سرعة الجسم عندما يكون الجسم على ارتفاع ١٠٠ م

الحل

∵ ف = ١٠٠

∴ ٦٠ن - ٥ ن^{٢} = ١٠٠

∴ ٥ ن^{٢} - ٦٠ن + ١٠٠ = ٠ ← ن^{٢} - ١٢ن + ٢٠ = ٠

∴ (ن - ٢) (ن - ١٠) = ٠

ن = ٢

ع (ن) = ٦٠ - ١٠ ن

ع (٢) = ٦٠ - ١٠ × ٢

= ٤٠ م / ث

ن = ١٠

ع (١٠) = ٦٠ - ١٠ × ١٠

= ٦٠ - ١٠٠

= - ٤٠ م/ث

إيجاد مجالات التزايد والتناقص للدالة د(س):

إذا كان د (س) معرفة على [أ ، ب] وكانت $س_1$ ، $س_2$ ∋ [أ،ب]
فإن د (س) تكون :

١. متزايدة في الفترة [أب] إذا كان $د(س_2) > د(س_1)$ لكل $س_2 > س_1$

٢. متناقصة في الفترة [أب] إذا كان $د(س_2) < د(س_1)$ لكل $س_2 > س_1$

٣. ثابتة في الفترة [أب] إذا كان $د(س_2) = د(س_1)$ لكل $س_2 > س_1$

أي أن :

* د (س) متزايدة عندما يصعد منحناها إلى أعلى كلما تحركت لليمين ويصنع المماس زاوية حادة مع محور السينات .

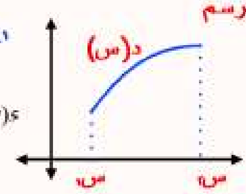
* د (س) متناقصة عندما يهبط منحناها إلى أسفل كلما تحركت لليمين ويصنع المماس زاوية منفرجة مع محور السينات .

* د (س) ثابتة إذا كان المماس أفقياً ويوازي محور السينات .

توضيح بالرسم

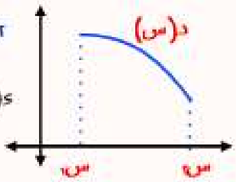
١. متزايدة في الفترة [أب] إذا كان

$د(س_2) > د(س_1)$ لكل $س_2 > س_1$



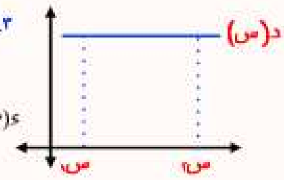
٢. متناقصة في الفترة [أب] إذا كان

$د(س_2) < د(س_1)$ لكل $س_2 > س_1$



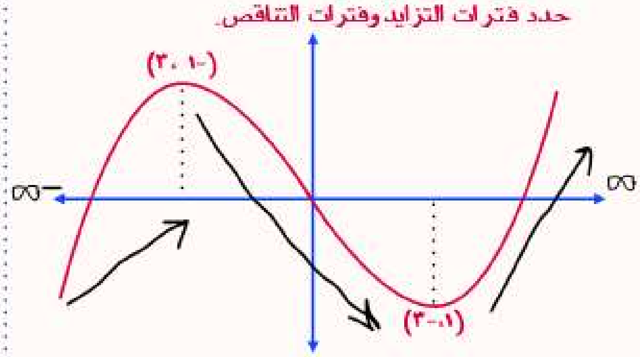
٣. ثابتة في الفترة [أب] إذا كان

$د(س_2) = د(س_1)$ لكل $س_2 > س_1$



الرياضيات البحتة الصف الثاني عشر الفصل الدراسي الأول التزايد والتناقص

مثال الشكل المقابل يمثل منحنى د (س) كثيرة حدود من الدرجة الثالثة
حدد فترات التزايد وفترات التناقص.



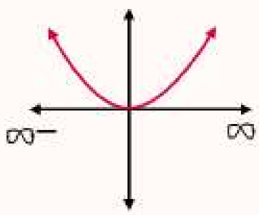
الحل

(١)]-∞ ، -١] متزايدة

(٢) [١ ، ∞ [متزايدة

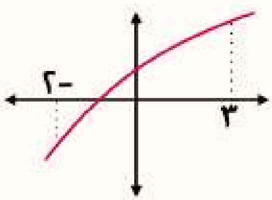
(٣) [-١ ، ١] متناقصة

مثال حدد مجالات التزايد و التناقص في الدالتين التاليتين :



(١) [٠ ، ∞ [متزايدة

]-∞ ، ٠] متناقصة



(٢) [-٢ ، ٣]

متزايدة

استخدام إشارة المشتقة الأولى لتحديد فترات التزايد والتناقص للدوال

لاحظنا فيما سبق كيفية تحديد مجالات التزايد والتناقص من خلال رسم الدالة نفسها ، ولكن غالبًا يتعذر علينا رسم الدالة أو أن رسمها يستغرق وقتًا .

لذلك نلجأ إلى المشتقة الأولى وإشارتها لتحديد مجالات التزايد والتناقص للدالة .

نظرية

إذا كان د (س) متصلًا على الفترة [أ ، ب] وقابلًا للاشتقاق على الفترة] أ ، ب [فإن د (س) تكون :

(١) متزايدة على الفترة [أ ، ب] إذا كانت : د/(س) > صفر لكل س ∈] أ ، ب [

(٢) متناقصة على الفترة [أ ، ب] إذا كانت : د/(س) < صفر لكل س ∈] أ ، ب [

(٣) ثابتة على الفترة [أ ، ب] إذا كانت : د/(س) = صفر لكل س ∈] أ ، ب [

طريقة الحل وإيجاد فترات التزايد والتناقص تتم عن طريق إيجاد المشتقة ودراسة إشارتها ، فإذا كانت الإشارة موجبة كانت الدالة متزايدة ، وإذا كانت سالبة كانت الدالة متناقصة بالخطوات التالية :

١ . اشتقاق الدالة

٢ . مساواتها بالصفر لإيجاد نقاط التحول (النقاط الحرجة) .

٣ . رسم خط الأعداد ووضع أصفار المشتقة عليه .

٤ . اختبار إشارة المشتقة بأخذ أعداد قبل وبعد نقاط التحول .

٥ . تحديد مجالات التزايد والتناقص .

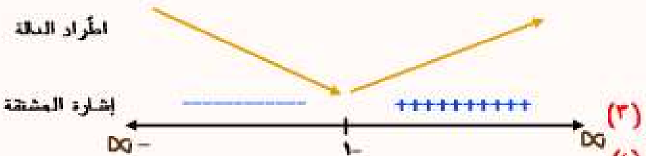
مثال

حدد مجالات التزايد والتناقص للدالة : د (س) = س² + ٢س + ٥

الحل

(١) د′(س) = ٢س + ٢   (٢) س = -١

(٣)



(٤)

* نأخذ قيمة على يسار الـ -١ ونعوضها في المشتقة: النتيجة سالبة
* نأخذ قيمة على يمين الـ -١ ونعوضها في المشتقة: النتيجة موجبة

(٥) الدالة : متزايدة في الفترة : [-١ ، ∞[لأن : د′(س) > ٠

متناقصة في الفترة :]-∞ ، -١] لأن : د′(س) < ٠

تدريب

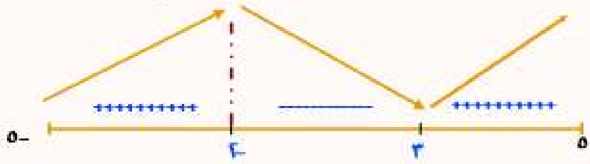
حدد فترات التزايد والتناقص لكل من الدوال التالية

(١) د(س) = $\frac{١}{٣}$ س³ − $\frac{١}{٢}$ س² − ٦ س   س ∈ [-٥، ٥]

الحل

د (س) = س² − س − ٦

∴ (س − ٣) (س + ٢) = ٠   ∴ س = ٣ ، س = -٢



متزايدة : [-٥، -٢] ∪ [٣، ٥]   لأن : د′(س) > ٠

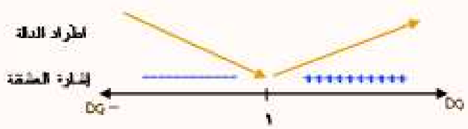
متناقصة : [-٢ ، ٣]   لأن : د′(س) < ٠

(٢) د(س) = |٤ − ٤ س|

الحل

د(س) = { ٤س − ٤ ، س ≥ ١ ؛ ٤ − ٤س ، س < ١ } ⇐ د′(س) = { ٤ ، س > ١ ؛ −٤ ، س < ١ }

نلاحظ أن المشتقة عدد ثابت



متزايدة : [١ ، ∞ [لأن : د′(س) > ٠

متناقصة :] -∞ ، ١]   لأن : د′(س) < ٠