الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الأول

قناة الأستاذ : حمد الرديني
التعليمية على اليوتيوب

الدائرة هي المحل الهندسي لنقطة في المستوى الإحداثي بحيث أن بعدها عن نقطة ثابتة يساوي مقداراً ثابتاً .

تسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة (أ ، ب) . البعد الثابت يسمى نصف قطر الدائرة .

مثال أوجد معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون بعدها عن النقطة م (٠ ، ٠) نصف بعدها عن النقطة (-١، ٢) .

الحل نفرض أن النقطة المتحركة هي (س ، ص) .
وسنستخدم قانون البعد بعين نقطتين :

$$\therefore \sqrt{(\text{س}-0)^2+(\text{ص}-0)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(\text{س}+1)^2+(\text{ص}-2)^2}$$

$$\therefore \text{س}^2+\text{ص}^2 = \frac{1}{4}\left((\text{س}+1)^2+(\text{ص}-2)^2\right)$$

$$4\text{س}^2+4\text{ص}^2 = \text{س}^2+2\text{س}+1+\text{ص}^2-4\text{ص}+4$$

$$4\text{س}^2+4\text{ص}^2-\text{س}^2-2\text{س}-\text{ص}^2+4\text{ص}-5=0$$

$$\therefore 3\text{س}^2+3\text{ص}^2-2\text{س}+4\text{ص}-5=0$$

وهي معادلة المحل الهندسي للنقطة

مثال أوجد معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون بعدها عن النقطة م (٠ ، ٠) يساوي ٥ .

الحل نفرض أن النقطة المتحركة هي (س ، ص) .
وسنستخدم قانون البعد بعين نقطتين :

$$\therefore \text{ف} = \sqrt{(\text{س}-0)^2+(\text{ص}-0)^2} \Leftarrow 5 = \sqrt{\text{س}^2+\text{ص}^2}$$

$$\therefore \text{س}^2+\text{ص}^2 = 25$$

وهي معادلة المحل الهندسي للنقطة

١. معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل (٠ ، ٠) ونصف قطرها نق :

$$\boxed{\text{س}^2 + \text{ص}^2 = \text{نق}^2}$$

مثال أكتب معادلة الدائرة في الحالات التالية :

١. مركزها (٠ ، ٠) و $\text{نق} = 10$

الحل $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 10^2 \quad \therefore \text{س}^2 + \text{ص}^2 = 100$

٢. مركزها (٠ ، ٠) و $\text{نق} = \sqrt{5}$

الحل $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 5$

٣. مركزها (٠ ، ٠) و $\text{نق} = 2\sqrt{10}$

الحل $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 40$

مثال هل النقاط التالي تقع على الدائرة : $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 25$ ؟

نعوض عن قيمة س و قيمة ص ي المعادلة .
فإذا ظهر أن الطرفين متساويين فإن النقطة تقع على الدائرة .
و غير ذلك فإن النقطة ليست على الدائرة .

١. (٤ ، ٢)

الحل $4^2 + 2^2 \neq 25 \Leftarrow$ النقطة لا تقع على الدائرة .

٢. (٤ ، ٣)

الحل $4^2 + 3^2 = 25 \Leftarrow$ النقطة تقع على الدائرة .

٢. معادلة الصورة القياسية للدائرة : $\boxed{(\text{س} - \text{د})^2 + (\text{ص} - \text{هـ})^2 = \text{نق}^2}$

مثال أكتب معادلة الدائرة في الحالات التالية :

١. المركز (٢ ، -٣) ، نق = ٧

الحل $(\text{س} - 2)^2 + (\text{ص} + 3)^2 = 49$

٢. المركز (٣ ، -٤) ، نق = ٦

الحل $(\text{س} - 3)^2 + (\text{ص} + 4)^2 = 36$

٣. المركز ($\sqrt{2}$ ، ٣) ، نق = $\sqrt{19}$

الحل $(\text{س} - \sqrt{2})^2 + (\text{ص} - 3)^2 = 19$

٤. المركز (٥ ، ٠) ، نق = ١

الحل $(\text{س} - 5)^2 + \text{ص}^2 = 1$

مثال أوجد إحداثيات المركز ونصف قطر الدائرة للدوائر التالية :

$\boxed{1}$ $(\text{س} - 5)^2 + (\text{ص} + 3)^2 = 40$

الحل المركز : (٥ ، -٣) نق = $\sqrt{40}$

$\boxed{2}$ $\text{س}^2 + (\text{ص} - 5)^2 = 16$

الحل المركز : (٠ ، ٥) نق = ٤

$\boxed{3}$ $(2\text{س} - 6)^2 + (2\text{ص} + 8)^2 = 40$

الحل $(2(\text{س} - 3))^2 + (2(\text{ص} + 4))^2 = 40 \Leftarrow \therefore 4(\text{س} - 3)^2 + 4(\text{ص} + 4)^2 = 40$

$\therefore (\text{س} - 3)^2 + (\text{ص} + 4)^2 = 10 \Leftarrow$ المركز (٣ ، -٤)

نق = $\sqrt{10}$

مثال

اكتب معادلة الدالة التي مركزها (-٢ ، ٥) وتمر بالنقطة (٣ ، ٢)

الحل

(س + ٢)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = نق^{٢}

∵ (٣ ، ٢) تمر بالدائرة فهي تحقق معادلتها :

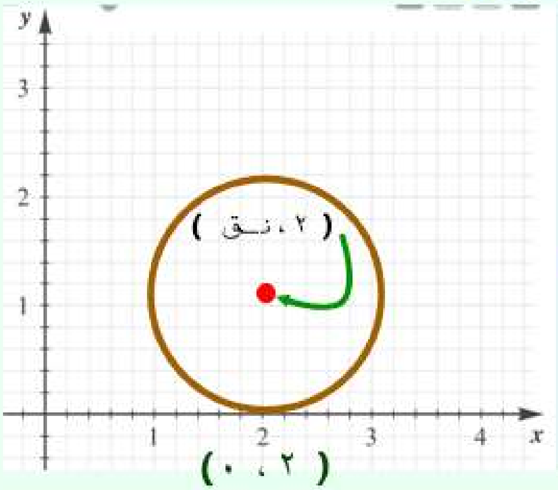
∴ (٣ + ٢)^{٢} + (٢ − ٥)^{٢} = نق^{٢}

∴ ٥^{٢} + (−٣)^{٢} = نق^{٢} ⇐ ٢٥ + ٩ = نق^{٢} ⇐ نق^{٢} = ٣٤

∴ نق = $\sqrt{٣٤}$

∴ المعادلة : (س + ٢)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٣٤

حالات خاصة من الصورة القياسية



(أ) معادلة الدائرة التي تمس محور السينات :

في هذه الحالة : نـق = | الإحداثي الصادي |

والإحداثي السيني للمركز هنا = الإحداثي السيني لنقطة التماس

مثال أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (-٣ ، ٤) وتمس محور السينات.

الحل

∵ الدائرة تمس محور السينات

∴ نق = | ٤ |

∴ المعادلة : $(س + ٣)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ١٦$

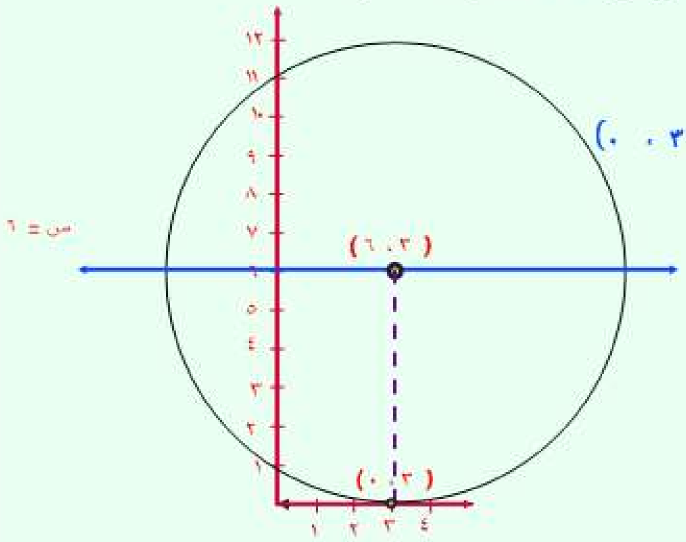
ونقطة تماس الدائرة مع المحور السيني هي : (-٣ ، ٠)

الرياضيات البحتة الصف الثاني عشر الفصل الدراسي الأول الدائرة

تدريب :

أوجد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم ص = ٦ وتمس محور السينات عند النقطة (٣ ، ٠)

الحل



∵ المركز يقع على المستقيم : ص = ٦ ونقطة التماس (٣ ، ٠)

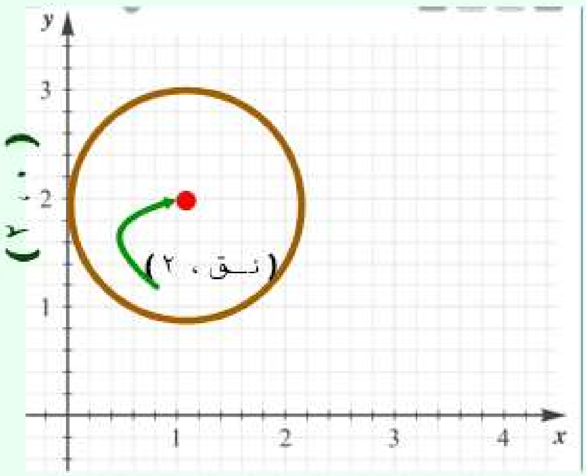
∴ الإحداثي الصادي للمركز هو : ٦

∴ المركز : (٣ ، ٦) نق = |٦|

∴ المعادلة هي :

$(س - ٣)^٢ + (ص - ٦)^٢ = ٣٦$

(ب) معادلة الدائرة التي تمس محور الصادات :



في هذه الحالة :

نـق = | الإحداثي السيني |

والإحداثي الصادي للمركز هنا
=
الإحداثي الصادي لنقطة التماس

مثال أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، ٤) وتمس محور الصادات .

الحل

∵ الدائرة تمس محور الصادات

∴ نق = | ٣ |

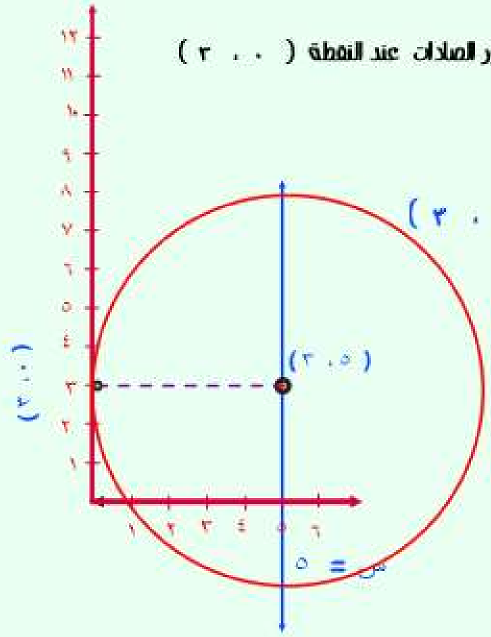
∴ المعادلة : $(س - ٣)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٩$

الرياضيات البحتة   الصف الثاني عشر   الفصل الدراسي الأول   الدائرة

تدريب :

أوجد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم س = ٥ وتمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، ٣)

الحل



∵ المركز يقع على المستقيم : س = ٥ ونقطة التماس (٠ ، ٣)

∴ الإحداثي الصادي للمركز هو : ٣

∴ المركز : (٥ ، ٣)   نق = | ٥ | = ٥

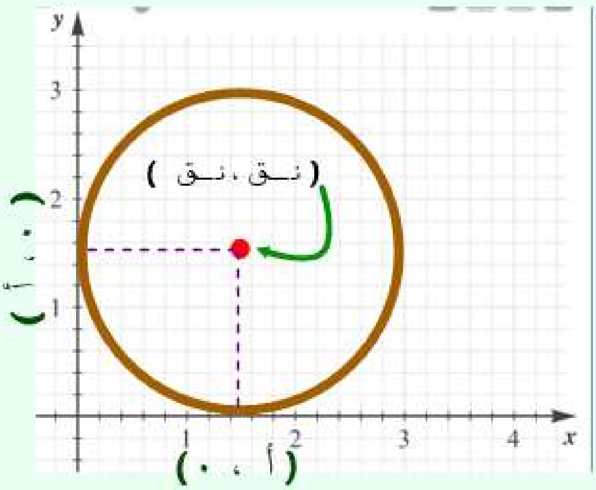
∴ المعادلة هي :

$$(س - ٥)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٢٥$$

(ج) معادلة الدائرة التي تمس كلا المحورين السيني والصادي :

في هذه الحالة :

نـق = | الإحداثي السيني | = | الإحداثي الصادي |



مثال

أوجد معادلة الدائرة التي طول نصف قطرها ٣ وتمس كلا المحورين السيني والصادي .

الحل

الربع الأول : م (٣ ، ٣) نق=٣

$$(\text{س} - ٣)^{٢} + (\text{ص} - ٣)^{٢} = ٩$$

الربع الثاني : م (-٣ ، ٣) نق=٣

$$(\text{س} + ٣)^{٢} + (\text{ص} - ٣)^{٢} = ٩$$

الربع الثالث : م (-٣،-٣) نق=٣

$$(\text{س} + ٣)^{٢} + (\text{ص} + ٣)^{٢} = ٩$$

الربع الرابع : م (٣،-٣) نق=٣

$$(\text{س} - ٣)^{٢} + (\text{ص} + ٣)^{٢} = ٩$$

الرياضيات البحتة الصف الثاني عشر الفصل الدراسي الأول الدائرة

مثال

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (-١ ، ٣) وتمس المستقيم الذي معادلته
٢س + ص + ٧ = ٠

تذكر

$$\text{ل} = \frac{|\text{أ س}_{١} + \text{ب ص}_{١} + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}}$$

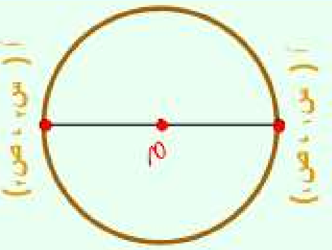
الحل

∵ المركز : (-١ ، ٣)

$$\therefore \text{نق} = \frac{|٢ \times -١ + ٣ + ٧|}{\sqrt{٢^{٢} + ١^{٢}}} = \frac{٨}{\sqrt{٥}}$$

$$\therefore \text{المعادلة} : (\text{س} + ١)^{٢} + (\text{ص} - ٣)^{٢} = \left(\frac{٨}{\sqrt{٥}}\right)^{٢}$$

(د) معادلة الدائرة إذا علم إحداثيات نهايتي قطر فيها ($س_1$ ، $ص_1$) ، ($س_2$ ، $ص_2$) :



هناك طريقتان لكتابة المعادلة في هذه الحالة :

١ . تطبيق القانون مباشرة :

$$س^{٢} + ص^{٢} - (س_1 + س_2)س - (ص_1 + ص_2)ص + س_1 س_2 + ص_1 ص_2 = ٠$$

٢ . إيجاد المركز باستخدام إحداثيات منتصف المسافة بين نقطتين : $\left(\frac{س_1 + س_2}{٢} ، \frac{ص_1 + ص_2}{٢} \right)$

ثم نوجد قانون المسافة بين نقطتين لإيجاد القطر ونقسم على ٢ : $نق = \frac{\sqrt{(س_1 - س_2)^{٢} + (ص_1 - ص_2)^{٢}}}{٢}$

مثال أوجد معادلة الدائرة التي نهايتي قطر فيها هو النقطتين : أ (٢ ، −٥) ، ب (−٦ ، ١) .

الحل س^{٢} + ص^{٢} − (٢ −٦) س − (−٥ + ١) ص + ٢ × −٦ + −٥ × ١ = ٠

س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س + ٤ ص − ١٧ = ٠

مثال إذا كانت الدائرة نهاية قطريها : أ (−١ ، −٥) ، ب (أ ، ٢) ، وتمر بالنقطة (١ ، ٠) فأوجد أ .

الحل س^{٢} + ص^{٢} − (−١ + أ) س − (−٥ + ٢) ص + −١ × أ + −٥ × ٢ = ٠

س^{٢} + ص^{٢} − (−١ + أ) س + ٣ ص − أ − ١٠ = ٠ ← ∵ الدائرة تمر بالنقطة : (١ ، ٠)

∴ ١ + ٠ − (−١ + أ) − أ − ١٠ = ٠ ← ٢ − ٢أ − ١٠ = ٠ ← −٢أ = ٨ ← أ = −٤

∴ المعادلة : س^{٢} + ص^{٢} + ٥س + ٣ص − ٦ = ٠

الرياضيات البحتة الصف الثاني عشر الفصل الدراسي الأول الدائرة

مثال أوجد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم : ص = ٢س + ٣ ، وتمس محور السينات عند (٢ ، ٠)

الحل ∵ الدائرة تمس المحور السيني عند النقطة (٢ ، ٠)

∴ الإحداثي السيني للمركز = ٢

∴ إحداثي المركز (٢ ، ص)

∵ المركز يقع على المستقيم : ص = ٢س + ٣ ∴ ص = ٢ × ٢ + ٣ = ٧

∴ إحداثيات المركز (٢ ، ٧) ← نق = | ٧ | = ٧

∴ معادلة الدائرة : (س − ٢)^{٢} + (ص − ٧)^{٢} = ٤٩

(هـ) الصورة العامة لمعادلة الدائرة :

س^2 + ص^2 + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠ ⟵ نق^2 = ل^2 + ك^2 - جـ ⟵ نق = $\sqrt{\text{ل}^2 + \text{ك}^2 - \text{جـ}}$

المركز (- ل ، - ك) ⟵ ($\frac{-1}{2}$ معامل س ، $\frac{-1}{2}$ معامل ص)

مثال أوجد مركز ونصف قطر كل من الدوائر التالية :

١. ٣ س^2 + ٣ ص^2 - ٦س + ١٢ص - ٦ = ٠

الحل س^2 + ص^2 - ٢س + ٤ص - ٢ = ٠

المركز : $\left(\frac{-1}{2} \times -2 ، \frac{-1}{2} \times 4\right) = (1 ، -2)$

نق = $\sqrt{1+4+2} = \sqrt{7}$

٢. س^2 + ص^2 + ٢س - ٨ص - ٣ = ٠

الحل

المركز : $\left(\frac{-1}{2} \times 2 ، \frac{-1}{2} \times -8\right) = (-1 ، 4)$

نق = $\sqrt{1+16+3} = \sqrt{20}$

ملاحظات على الدائرة : الشروط الواجب توافرها في معادلة الدائرة :

١. تربيعية في س ، تربيعية في ص .

٢. معامل $س^{٢}$ = معامل $ص^{٢}$.

٣. لا يوجد حد يجمع س ص .

٤. نق ≥ صفر .

أمثلة على معادلات لا تمثل معادلات دائرة :

١ $س^{٢} + ص^{٢} \boxed{- ٣س ص} + ٤ = ٠$ لا تمثل دائرة لوجود حد به س ص

٣ $\boxed{س^{٣}} + س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ لا تمثل دائرة لوجود حد به $س^{٣}$

٢ $\boxed{س^{٢} - ص^{٢}} - ٣س + ٤ص = ٥$
لا تمثل دائرة لأن معامل $س^{٢}$ لا يساوي معامل $ص^{٢}$

٤ $س^{٢} + ص^{٢} + ٢س + ٢ص + ١٠ = ٢٥$
نق سالب وهذا يعني أن الدائرة غير حقيقية

مثال أكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط : (٢ ، -١) ، (-٢ ، ٣) ، (١ ، -٣)

الحل

صورة المعادلة : $س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠$.

١ (٢ ، -١) ← ٤ + ١ + ٤ل − ٢ك + جـ = ٠ .

$\boxed{٤ل - ٢ك + جـ = -٥}$ ← ١

٢ (-٢ ، ٣) ← ٤ + ٩ − ٤ل + ٦ك + جـ = ٠ .

$\boxed{-٤ل + ٦ك + جـ = -١٣}$ ← ٢

٣ (١ ، -٣) ← ١ + ٩ + ٢ل − ٦ك + جـ = ٠ .

$\boxed{٢ل - ٦ك + جـ = -١٠}$ ← ٣

نتخلص من جـ :

٨ل − ٨ك = ٨ ← $\boxed{ل - ك = ١}$ ← ٤

(٢) − (٣)

٦ل − ١٢ك = ٣ ← $\boxed{٢ل - ٤ك = ١}$ ← ٥

بضرب (٤) × −٢ يقع : $\boxed{-٢ل + ٢ك = -٢}$ ← ٦

(٥) + (٦) −٢ك = −١ ← $\boxed{ك = \frac{١}{٢}}$

بالتعويض في معادلة رقم (٤) ل = ١ + $\frac{١}{٢}$ $\boxed{ل = \frac{٣}{٢}}$

بالتعويض في معادلة رقم (١) ٤ × $\frac{٣}{٢}$ −٢ × $\frac{١}{٢}$ + جـ = −٥

$\boxed{جـ = -١٠}$

المعادلة : $\boxed{س^{٢} + ص^{٢} + ٣س + ص - ١٠ = ٠}$

تدريب: اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط التالية: (٠ ، ٢) ، (٨ ، -٢) ، (٩ ، ٥)

الحل

س^٢ + ص^٢ + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠

١ (٠ ، ٢) ← $\boxed{\text{٤ + ٤ك + جـ = ٠}}$ ← ١

٢ (٨ ، -٢) ← $\boxed{\text{٦٨ + ١٦ل - ٤ك + جـ = ٠}}$ ← ٢

٣ (٩ ، ٥) ← $\boxed{\text{١٠٦ + ١٨ل + ١٠ك + جـ = ٠}}$ ← ٣

نطرح: (١) - (٢) ← -٦٤ - ١٦ل + ٨ك = ٠

$\boxed{\text{-٨ - ٢ل + ك = ٠}}$ ← ٤

بطرح: (٢) - (٣) ← $\boxed{\text{٣٨ + ٢ل + ١٤ك = ٠}}$ ← ٥

بجمع: (٤) + (٥) ← ٣٠ + ١٥ك = ٠ ← $\boxed{\text{ك = -٢}}$

بالتعويض في معادلة رقم (٤):

- ٨ - ٢ل - ٢ = ٠ ← $\boxed{\text{ل = -٥}}$

بالتعويض في معادلة رقم (١): ← $\boxed{\text{جـ = ٤}}$

معادلة الدائرة: $\boxed{\text{س}^2\text{ + ص}^2\text{ - ١٠س - ٤ص + ٤ = ٠}}$

التحويل من الصورة العامة إلى الصورة القياسية :

لتحويل معادلة الدائرة من الصورة العامة إلى الصورة القياسية نقوم بإكمال الربّع في س وكذلك إكمال المربع في ص .

مثال حول معادلة الدائرة التالية إلى الصورة القياسية ثم أوجد نصف القطر والمركز .

(١) س^{٢}+ ص^{٢}- ٨س + ٦ص + ٢٥= ٠

الحل

س^{٢} - ٨س + ١٦ + ص^{٢}+ ٦ص + ٩ = ١٦ + ٩ - ٢٥

(س - ٤)^{٢}+ (ص + ٣)^{٢}= ٠

م (٤ ، -٣) نق = صفر

(الدائرة عبارة عن نقطة)

(٢) س^{٢}+ ص^{٢}- ١٠س + ٨ص + ١٩= ٠

الحل

س^{٢} - ١٠س + ٢٥ + ص^{٢}+ ٨ص + ١٦ = ٢٥ + ١٦ - ١٩

(س - ٥)^{٢}+ (ص + ٤)^{٢}= ٢٢

م (٥ ، -٤) نق = $\sqrt{٢٢}$

تمرين اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين : (٣ ، -٢) ، (-١ ، ٤) ويقع مركزها على المستقيم : ٥س - ٣ص = ١١

وضع نقطة بالنسبة لدائرة :

بالتعويض المباشر في معادلة الدائرة بعد وضع طرفها الأيسر يساوي صفر :

١ . إذا كانت النتيجة صفر فهذا يعني أن النقطة واقعة على منحنى الدائرة .

٢ . إذا كانت النتيجة سالبة فهذا يعني أن النقطة واقعة داخل الدائرة .

٣ . إذا كانت النتيجة موجبة فهذا يعني أن النقطة واقعة خارج الدائرة . والمسافة في هذه الحالة تمثل طول القطعة المستقيمة المرسومة من النقطة إلى مماس الدائرة

مثال حدد موضع النقاط التالية بالنسبة للدائرة :

س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + ٢ص - ١٢= ٠

١. (٢ ، ٣)

٢^{٢} + ٣^{٢} - ٨ + ٦ - ١٢ = -٣ النقطة داخل الدائرة

٢. (٢ ، -١)

٢^{٢} + ١ - ٨ - ٢ - ١٢ = - ١٨ النقطة داخل الدائرة

٣. (٤ ، ٤)

١٦ + ١٦ - ١٦ + ٨ - ١٢ = ١١ > صفر النقطة خارج الدائرة

(١) إذا كانت المسافة بين المستقيم والمركز = نق
فإن المستقيم يمس الدائرة .

(٢) إذا كانت المسافة بين المستقيم والمركز > نق
فإن المستقيم خارج الدائرة .

(٣) إذا كانت المسافة بين المستقيم والمركز < نق
فإن المستقيم يقطع الدائرة في نقطتين .

مثال حدد موقع المستقيم : ٣س - ٤ص + ٧ = ٠
بالنسبة للدائرة : $س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٦ص - ١٢ = ٠$.

الحل م (٢ ، -٣)   نق = ٥

$$\text{المسافة بين المستقيم والمركز} = \frac{|٦ + ١٢ + ٧|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = ٥$$

∴ بالتالي فإن المستقيم يمس الدائرة .

تدريب برهن أن المستقيم : س + ص = ٤ يقطع
الدائرة : $س^٢ + ص^٢ + ٤س - ٢ص - ٢٠ = ٠$
في نقطتين .

الحل م (-٢ ، ١)   نق = ٥

$$ف = \frac{|١ \times -٢ + ١ \times ١ - ٤|}{\sqrt{١ + ١}} = \frac{|-٥|}{\sqrt{٢}} = \frac{٥}{\sqrt{٢}} < ٥$$

∴ المستقيم يقطع الدائرة في نقطتين

ولإيجاد نقاط التقاطع نوجد ص من المستقيم كالتالي :   ص = ٤ - س
ونعوضها في الدائرة مكان كل ص ونوجد النقاط .