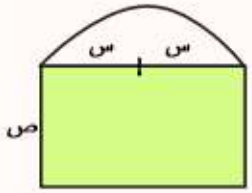
تمرين

نافذة على شكل مستطيل ، يعلوه دائرة ، فإذا كان محيط النافذة = ٣٠ قدم
فأوجد نصف قطر الدائرة بحيث يمر فيها أكبر كمية ضوء .
(مساحتها أكبر ما يمكن)



الحل مساحة النافذة أكبر ما يمكن ⟵ م = مساحة المستطيل + مساحة نصف دائرة

= ٢س ص + $\frac{1}{2}$ س^{2} π ⟵ ∴ $\boxed{م = ٢س ص + \frac{\pi}{2} س^{2}}$ ١

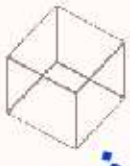
المعادلة المساعدة : محيط النافذة = ٣٠ ⟵ ∴ محيط النافذة = (محيط المستطيل - ضلع) + ($\frac{1}{2}$ محيط الدائرة)

٣٠ = (محيط المستطيل - ضلع) + ($\frac{1}{2}$ × ٢ π نق) ⟵ ٣٠ = ٢س + ٢ص + π س ⟵ ∴ ٢ص = ٣٠ - ٢س - π س

$\boxed{∴ ص = ١٥ - س - \frac{\pi}{2} س}$ ..... ٢ ∴ م = ٢س (١٥ - س - $\frac{\pi}{2}$ س) + $\frac{1}{2}$ س^{2} π ⟵ م = ٣٠س - ٢ س^{2} - π س^{2} + $\frac{1}{2}$ س^{2} π

م$'$ = ٣٠ - ٤س - ٢πس + π س = صفر ⟵ - س (٤ + π) = - ٣٠ ⟵ $\boxed{س = \frac{٣٠}{(\pi + ٤)}}$ نصف قطر الدائرة

للتأكد : م$''$ = - ٤ - ٢ π + π < صفر أكبر ما يمكن (عظمى)



الصف الثاني عشر
الفصل الدراسي الأول

قناة الأستاذ : حمد الردیني
التعليمية على اليوتيوب

إن مشتقة أي كمية ولتكن ك بالنسبة للزمن تساوي : $\frac{\text{د ك}}{\text{د ن}}$ وهذا يعني معدل تغير هذه الكمية بالنسبة للزمن . وكذلك إذا اشتركت مع هذه الكمية كميات أخرى مثل س أو ص ، وكانتا يتغيران بالنسبة للزمن، فإن معدل تغير س هو $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ ومعدل تغير ص هو $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ بالنسبة للزمن .

خطوات حل مسائل المعدلات الزمنية

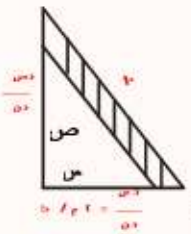
١. رسم العلاقة التي تربط المتغيرات في المسألة .
٢. تحديد المتغيرات والثوابت في المسألة .
٣. تسمية المتغيرات في المسألة مثل س ، ص ، ع ، وهكذا .
٤. نبحث عن المطلوب في المسألة ونصيغ المعادلة التي تحتويه .
٥. تعويض معطيات المسألة بدلالة المتغيرات التي تم تسميتها .
٦. أحياناً نحتاج للتعبير عن متغير بدلالة متغير آخر بسبب عدم توفر بعض المعطيات .
٧. اشتقاق المعادلة النهائية بالنسبة للزمن وتعويض المعطيات واستخراج المطلوب .
٨. بذكر بأن أي كمية متناقصة فإن معدل تغيرها بالنسبة للزمن سيكون سالباً .
وإذا كانت الكمية متزايدة فإن معدل تغيرها بالنسبة للزمن سيكون موجباً .

الرياضيات البحتة الصف الثاني عشر الفصل الدراسي الأول المعدلات الزمنية

مثال سلم طوله ١٠ م يستند طرفه العلوي على حائط رأسي، وطرفه السفلي على أرض أفقية ، فإذا انزلق السلم بحيث أن طرفه السفلي يتحرك بسرعة ٢ م / د ، مبتعداً عن الحائط . فأوجد :

١. معدل نزول الطرف العلوي للسلم . ٢. معدل التغير في مساحة المثلث المكون من السلم والحائط والأرض في اللحظة التي يكون فيها الطرف السفلي على بعد ٨ م عن الحائط .

الحل



(١) نفرض أن بعد رأس السلم السفلي عن الحائط = س وبعد رأس السلم العلوي عن الأرض = ص

العلاقة : $س^{٢} + ص^{٢} = (١٠)^{٢}$ ⟵ $\therefore$ $س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠$ ⟵ $٢ س \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢ ص \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٠$ ١

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ معطى $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ مطلوب عند س = ٨ فإن ص = ٦ $\therefore$ نعوض في ١

$\therefore$ $٢ \times ٨ \times ٢ + ٢ \times ٦ \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٠$ ⟵ $+٣٢ + ١٢ \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٠$ $\therefore$ $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \frac{-٣٢}{١٢} = -\frac{٨}{٣}$ م / د

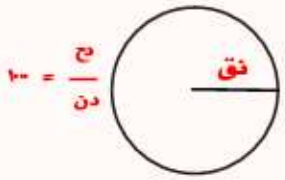
(٢) م $= \frac{١}{٢} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع ⟵ م $= \frac{١}{٢} \times س \times ص$ (نشتق بالنسبة للزمن)

$م' = \frac{١}{٢} \times س \times \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} + \frac{١}{٢} \times ص \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ ⟵ $= ٠ \frac{١}{٢} \times ٨ \times \frac{-٨}{٣} + \frac{١}{٢} \times ٦ \times ٢ = \frac{-٣٢}{٣} + ٦$ = $-\frac{١٤}{٣}$ م / د

مثال يزداد حجم بالون كروي بمعدل ١٠٠٠ سم^{٣}/ د ، أوجد معدل الزيادة في مساحة سطح البالون في اللحظة التي يكون فيها نصف قطره ١٠ سم

الحل

نفرض أن نصف قطر البالون = نق مساحة سطح البالون : م



المطلوب $\frac{دم}{دن}$ عند نق = ١٠

$م = ٤ \pi نق^{٢}$ ١

$\frac{دم}{دن} = ٨ \pi نق \frac{دنق}{دن}$ ($\frac{دنق}{دن}$ مجهولة وسنستخرجها من $\frac{دح}{دن}$)

$ح = \frac{٤}{٣} \pi نق^{٣} \longleftarrow \frac{دح}{دن} = ٤ \pi نق^{٢} \frac{دنق}{دن}$ $\therefore ١٠٠٠ = ٤٠٠ \pi \frac{دنق}{دن} \longleftarrow \frac{دنق}{دن} = \frac{١٠}{٤ \pi}$

$\therefore \frac{دم}{دن} = ٨ \pi نق \frac{دنق}{دن} = ٨ \times ١٠ \times \pi \times \frac{١٠}{٤ \pi} = ٢٠٠$ سم^{٢}/ د

الرياضيات البحتة الصف الثاني عشر الفصل الدراسي الأول المعدلات الزمنية

مثال صفيحة مستطيلة الشكل تتمدد بانتظام بحيث أن طولها يزداد بمعدل ٢سم / ث ، وعرضها يزداد بمعدل ١سم / ث ، وفي لحظة كان طولها يساوي ٨ سم وعرضها ٦ سم فأوجد :

(١) معدل التغير في محيطها (٢) معدل التغير في مساحتها

الحل

نفرض أن الطول = س $\longleftarrow \frac{دس}{دن} = ٢$

(١) المحيط = ٢س + ٢ص

$\frac{دل}{دن} = ٢ \frac{دس}{دن} + ٢ \frac{دص}{دن} = ٢ \times ٢ + ٢ \times ١ = ٤ + ٢ = ٦$ سم / ث

نفرض أن العرض = ص $\longleftarrow \frac{دص}{دن} = ١$

(٢) المساحة = س × ص $\longleftarrow \frac{دم}{دن} = س \frac{دص}{دن} + ص \frac{دس}{دن}$

$= ٨ \times ١ + ٦ \times ٢$

$= ٨ + ١٢ = ٢٠$ سم^{٢}/ ث

مثال اسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها $\frac{٥}{٧}$ ع وارتفاعها ع تتمدد بالحرارة فيزداد ارتفاعها بمعدل ٠,٠٠٢ سم/د أوجد معدل تغير حجمها عندما يكون ارتفاعها ١٤ سم

الحل

نفرض أن نصف قطر الاسطوانة : نق

الارتفاع : ع الحجم : ح

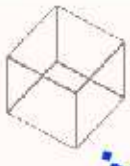
$\frac{دع}{دن} = ٠,٠٠٢$ المطلوب : $\frac{دح}{دن}$ عند ع = ١٤

$ح = \pi نق^{٢} ع$ ولكن : $نق = \frac{٥}{٧} ع$

$\therefore ح = \pi \times (\frac{٥}{٧} ع)^{٢} \times ع \longleftarrow ح = \frac{٢٥}{١٩} \pi ع^{٣}$

$\therefore \frac{دح}{دن} = \frac{٢٥}{١٩} \times \pi \times ٣ ع^{٢} \frac{دع}{دن}$

$= \frac{٢٥}{١٩} \times ٣ \times \pi \times (١٤)^{٢} \times ٠,٠٠٢١ = ٠,٦٣ \pi$ سم^{٣}/ د



الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الأول

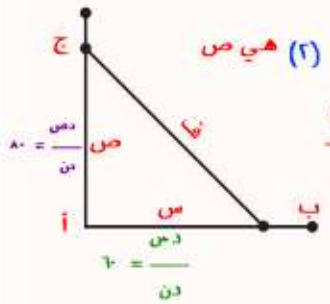
قناة الأستاذ : حمد الرديني

التعليمية على اليوتيوب

مثال انطلقت سفينتان في نفس الوقت من الميناء أ ، فسارت الأولى نحو الميناء ب بسرعة ٦٠ كم / س ، وسارت الثانية نحو الميناء جـ بسرعة ٨٠ كم / س ، أوجد معدّل تغير المسافة بين السفينتين بعد ساعتين من الإبحار ، علماً بأن الزاوية ب أ جـ قائمة .

الحل

نفرض أن المسافة التي قطعتها السفينة الأولى (١) هي س / نفرض أن المسافة التي قطعتها السفينة الثانية (٢) هي ص



$\frac{د س}{د ن}$ = ٦٠ كم / س ، $\frac{د ص}{د ن}$ = ٨٠ كم / س ، المطلوب : $\frac{د ف}{د ن}$ تفرض أن المسافة بين السفينتين هي ف

ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} ← نشتق ← ٢ف $\frac{د ف}{د ن}$ = ٢س $\frac{د س}{د ن}$ + ٢ ص $\frac{د ص}{د ن}$ ← ١

المطلوب المسافة بعد ساعتين

∴ ص بعد ساعتين = ٢ × ٨٠ = ١٦٠

س بعد ساعتين = ٢ × ٦٠ = ١٢٠

∴ ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} ← ف = ٢٠٠

∴ ٢ × ٢٠٠ $\frac{د ف}{د ن}$ = ٢ × ١٢٠ × ٦٠ + ٢ × ١٦٠ × ٨٠

∴ $\frac{د ف}{د ن}$ = $\frac{٤٠٠٠٠}{٤٠٠}$ = ١٠٠ كم / س

تدريب بركة راكدة ، ألقي فيها حجر فأحدث موجات دائرية ، وفي لحظة ما كانت مساحة إحدى الموجات الدائرية تزداد بمعدل ٢١ π م^{٢} / د ، فأوجد معدل التغير في محيط الموجه إذا كان نصف القطر عندئذ = ٧ م

الحل نفرض أن نصف قطر الموجة = نق

نفرض أن محيط الموجة = ل ⟵ $\frac{\text{د ل}}{\text{د ن}}$ مطلوب

نفرض أن مساحة الموجة = م ⟵ $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}$ = ٢١ π م^{٢} / د

ل = ٢نق π ⟵ $\frac{\text{د ل}}{\text{د ن}}$ = ٢ π $\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$ ١

$\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$ تستخرجها من المعطيات حيث : $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}$ = ٢١ π م^{٢} / د

م = نق^{٢} π ⟵ $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}$ = ٢ π نق $\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$ ⟵ $\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$ = $\frac{٢١\ \pi}{٢\ \pi \times ٧}$ = $\frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{\text{د ل}}{\text{د ن}}$ = ٢ × π × $\frac{٣}{٢}$ = ٣ π م / د

تمرين مخروط دائري قائم ، رأسه إلى أسفل ، يخرج منه الماء بمعدل ٢ سم^{٣} / ث ، وكان الماء يصبّ في المخروط بمعدل ٦ سم^{٣}/ ث وفي لحظة ما كان ارتفاع الماء في المخروط = ٨ سم فأوجد :

١. معدل التغير في ارتفاع الماء في المخروط ٢. معدل التغير في نصف قطر الماء العلوي . علماً بأن ارتفاع المخروط = ٤٠ سم ، ونصف قطره = ٢٠ سم

الحل نفرض أن ارتفاع الماء في المخروط = ع نفرض أن نصف قطر الماء = نق نفرض أن حجم الماء في المخروط = ح

$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}}$ = ٦ سم^{٣}/ ث - ٢ سم^{٣}/ ث = ٤ سم^{٣}/ ث

١. معدل التغير في ارتفاع الماء في المخروط $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$

∴ ح = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع ⟵ ١ ∵ $\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}}$ معطى

∴ سنستخرج $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ وسنضع أح المتغيرين نق ، ع بدلالة الآخر

من تشابه المثلثات : $\frac{٢٠}{\text{نق}}$ = $\frac{٤٠}{\text{ع}}$ ⟵ نق = $\frac{\text{ع}}{٢}$ بالتعويض في ١ ∴ ح = $\frac{١}{١٢}$ π ع^{٣}

∴ $\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}}$ = $\frac{١}{٤}$ π ع^{٢} $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ ⟵ $\frac{١}{٤}$ = π × (٨)^{٢} × $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$

∴ $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ = $\frac{١}{\pi ٤}$

٢. معدل التغير في نصف قطر الماء العلوي . ∵ نق = $\frac{\text{ع}}{٢}$ ⟵ ∴ $\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$ = $\frac{١}{٢}$ $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{\pi ٤}$ = $\frac{١}{\pi ٨}$