hash959@gmail.com
hamad_alrudini

الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الأول

الرياضيات البحتة

الوحدة الثانية

التفاضل وتطبيقاته

قناة الأستاذ : حمد الرديني

التعليمية على اليوتيوب

خطوات حل المسألة

١. نبحث في المسألة عن (أكبر ما يمكن ، أصغر ما يمكن)

حيث تكون منه المعادلة الأولى المطلوب اشتقاقها ، ونعطيها الرقم (١)
وعادة تكون هذه المعادلة متضمنة أكثر من مجهول .
(سم كل مجهول باسم ما مثل س ، ص)

٢. إذا تضمنت المعادلة رقم (١) أكثر من مجهول فيجب أن يكون في المسألة وجود معادلة مساعدة تجمع المجهولين مع بعضهما ضمن علاقة واضحة يتم من خلالها إيجاد أحد المتغيرين بدلالة الآخر ونسميها رقم (٢).

٣. إذا كان من الممكن عمل رسم فيكون من الأفضل ذلك إن أمكن .

٤. نعوض ما نتج من معادلة (٢) في معادلة (١) فنحصل على معادلة رقم (١) في متغير واحد .

٥. نشتق معادلة (١) مرّة واحدة من أجل اختبار القيم القصوى ، فإذا كانت نتيجة اختبار المشتقة الثانية :

سالبة ⟵ قيمة عظمى
موجبة ⟵ قيمة صغرى

مثال

أوجد عددين مجموعهما ٥٠ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

الحل

(١) حاصل ضربهما أكبر ما يمكن

نفرض أن الأول س والثاني ص — حاصل ضربهما ح

ح = س × ص ⟵ ١ أكبر ما يمكن

(٢) نبحث عن معادلة مساعدة : مجموعهما ٥٠ | س + ص = ٥٠ ⟵ ٢

(٣) ح = س (٥٠ - س) ⟵ ح = ٥٠س - س^{٢}

(٤) ح$'$ = ٥٠ - ٢س ⟵ س = ٢٥ ⟵ نعوض في المعادلة المساعدة ص = ٢٥

(٥) ح$''$ = - ٢ < صفر ⟵ قيمة عظمى

مثال أوجد عددين موجبين بحيث يكون حاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن، علماً بأن مجموعهما = ٣٠

الحل (١) نفرض أن الأول س ونفرض أن الثاني ص

ونفرض أن حاصل الضرب ح

ح = ص × س^{٢} ⟵ أكبر ما يمكن ١

(٢) س + ص = ٣٠ ⟵ ص = ٣٠ - س ٢

(٣) ح = (٣٠ - س) × س^{٢} ⟵ ح = ٣٠ س^{٢} - س^{٣}

ح$'$ = ٦٠س - ٣ س^{٢} ⟵ ح = ٣س (٢٠ - س) = ٠

∴ س = ٠ تستبعد س = ٢٠ ص = ١٠

(٤) ح$''$ = ٦٠ - ٦س ⟵ ح$''$ = ٦٠ - ٦ × ٢٠ < صفر

قيمة عظمى

مثال لديك ١٠٠٠ متر من السياج، أوجد مساحة أكبر قطعة مستطيلة يمكن سياجها .

الحل

(١) م = س × ص ..... ١ أكبر ما يمكن

(٢) طول السياج = ١٠٠٠

∴ محيط السياج = ١٠٠٠

⟵ ٢ س + ٢ص = ١٠٠٠

⟵ ∴ ص = ٥٠٠ - س ٢

(٣) م = س (٥٠٠ - س) ⟵ م = ٥٠٠س - س^{٢}

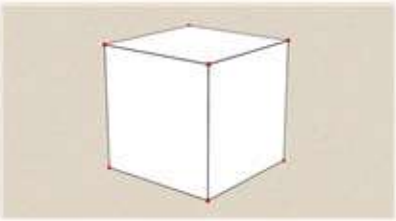
(٤) م$'$ = ٥٠٠ - ٢ س ⟵ س = ٢٥٠ ⟵ ص = ٢٥٠

(٥) م$''$ = -٢ < صفر قيمة عظمى عند س = ٢٥٠

∴ م = ٢٥٠ × ٢٥٠ = ٦٥٠٠

الرياضيات البحتة — الصف الثاني عشر — الفصل الدراسي الأول — تطبيقات عملية على القيم القصوى

مثال يراد صنع صندوق بلا غطاء، قاعدته مربعة الشكل، وحجمه ٣٢ سم^{٣} . أوجد أبعاد الصندوق لتكون كمّية المادّة المستخدمة لصنعه أقل ما يمكن .



الحل

المادة المستخدمة ..... أقل ما يمكن

المادة المستخدمة = مادة القاعدة + مادة الجوانب الأربعة

(١) م = س × س + ٤ س ص ⟵ م = س^{٢} + ٤ س ص ١

(٢) نبحث عن المعادلة المساعدة ⟵ حجم الصندوق = ٣٢

س × س × ص = ٣٢ ⟵ ص = $\frac{٣٢}{س^{٢}}$ ⟵ ∴ م = س^{٢} + ٤س × $\frac{٣٢}{س^{٢}}$ ⟵ ∴ م = س^{٢} + $\frac{١٢٨}{س}$

∴ م$'$ = ٢س - $\frac{١٢٨}{س^{٢}}$ = صفر ⟵ ٢ س^{٣} = ١٢٨ ⟵ ∴ س = ٤ ص = ٢

للتأكد م$''$ = ٢ + $\frac{٢٥٦}{س^{٣}}$ ⟵ م$''$(٤) = ٢ + $\frac{٢٥٦}{١٦}$ > صفر أقل ما يمكن قيمة صغرى عند س = ٤

hash959@gmail.com
hamad_alrudini

الرياضيات البحتة

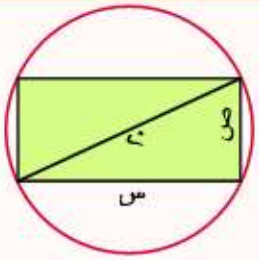
الوحدة الثانية

التفاضل وتطبيقاته

قناة الأستاذ : حمد الرديني

التعليمية على اليوتيوب

تدريب أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها ١٠ سم



الحل مساحة المستطيل أكبر ما يمكن

نفرض أن طول المستطيل = س

عرض المستطيل = ص

∴ م = س × ص ..... ١ (أكبر ما يمكن)

من نظرية فيثاغورث : $س^٢ + ص^٢ = ٤٠٠$ ∴ $ص = \sqrt{٤٠٠ - س^٢}$ ٢

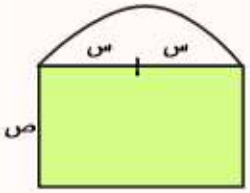
∴ $م = س\sqrt{٤٠٠ - س^٢}$ ∴ $م' = س \times \frac{-٢س}{٢\sqrt{٤٠٠ - س^٢}} + \sqrt{٤٠٠ - س^٢} = \frac{-س^٢}{\sqrt{٤٠٠ - س^٢}} + \sqrt{٤٠٠ - س^٢} = ٠$

بالضرب التبادلي $س = \sqrt{٢٠٠}$ ∴ $ص = \sqrt{٢٠٠}$ ∴ $م = \sqrt{٢٠٠} \times \sqrt{٢٠٠} = ٢٠٠$

للتأكد $م'' < صفر$ عند $س = \sqrt{٢٠٠}$ قيمة عظمى

تمرين

نافذة على شكل مستطيل ، يعلوه دائرة ، فإذا كان محيط النافذة = ٣٠ قدم
فأوجد نصف قطر الدائرة بحيث يمر فيها أكبر كمية ضوء .
(مساحتها أكبر ما يمكن)



الحل مساحة النافذة أكبر ما يمكن ⟵ م = مساحة المستطيل + مساحة نصف دائرة

= ٢ س ص + $\frac{١}{٢}$ س^{٢} π ⟵ ∴ $\boxed{م = ٢ س ص + \frac{\pi}{٢} س^{٢}}$ ١

المعادلة المساعدة : محيط النافذة = ٣٠ ⟵ ∴ محيط النافذة = (محيط المستطيل - ضلع) + ($\frac{١}{٢}$ محيط الدائرة)

٣٠ = (محيط المستطيل - ضلع) + ($\frac{١}{٢}$ × ٢ π نق) ⟵ ٣٠ = ٢س + ٢ص + π س ⟵ ∴ ٢ص = ٣٠ - ٢س - π س

$\boxed{∴ ص = ١٥ - س - \frac{\pi}{٢} س}$ ..... ٢ ∴ م = ٢س (١٥ - س - $\frac{\pi}{٢}$ س) + $\frac{١}{٢}$ س^{٢} π ⟵ م = ٣٠س - ٢ س^{٢} - π س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ س^{٢} π

م′ = ٣٠ - ٤س - ٢π س + س π = صفر ⟵ - س (٤ + π) = - ٣٠ ⟵ $\boxed{س = \frac{٣٠}{(٤ + \pi)}}$ نصف قطر الدائرة

للتأكد : م″ = - ٤ - ٢ π + π < صفر أكبر ما يمكن (عظمى)