haah959@gmail.com
hamad_alrudini

الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الأول

الرياضيات البحتة

الوحدة الأولى

النهايات والاتصال

قناة الأستاذ : حمد الرديني

التعليمية على اليوتيوب

ويقصد بها قيمة : د (س) عندما س ← ± ∞

انتبه

١ أ + ∞ = ∞ ، أ ∈ ع

٢ أ − ∞ = − ∞ ، أ ∈ ع

٣ أ × ∞ = ∞ ، أ موجبة

٤ − أ × ∞ = − ∞ ، أ سالبة

٥ أ / ∞ = صفر ، أ ∈ ع

٦ الكميات غير المعينة (غير معرفة)

١. ∞ / ∞ ٢. ∞ − ∞

أمثلة

١ نهـا (س ← ∞) ٥س^٢ = ٥ × ∞^٢ = ∞

٢ نهـا (س ← ∞) ٦س^−٥ = نهـا (س ← ∞) ٦ / س^٥ = ٦ / ∞ = ٠

٣ نهـا (س ← ∞) ٩ = ٩

في مثل هذه المسائل، وعند التعويض المباشر في الدوال النسبية ، فإذا كانت نتيجة التعويض $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\infty - \infty$ نلجأ إلى الطرق :

١. إذا كان أكبر أس في البسط أكبر من أكبر أس في المقام فإن النتيجة : ∞ أو $-\infty$

مثال $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س + س^{٥} + س^{٦}}{س^{٤} + س^{٣}}$ الحل $= \lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^{٦}}{س^{٤}} = \frac{\infty^{٦}}{\infty^{٤}} = \infty$

٢. إذا كان أكبر أس في البسط أصغر من أكبر أس في المقام فإن النتيجة : صفر

مثال $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^{٣}}{س^{٥}}$ الحل $= \lim\limits_{س \to \infty} \frac{١}{س^{٢}} = \frac{١}{\infty^{٢}} =$ صفر

٣. إذا كان أكبر أس في البسط = أكبر أس في المقام فإن النتيجة : $\frac{\text{معامل أكبر أ في البسط}}{\text{معامل أكبر أس في المقام}}$

مثال $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٦س^{٢} - ٣س^{٣} + ٣س}{٦س^{٣} + ٤س - ١}$ الحل $= \lim\limits_{س \to \infty} \frac{-٣س^{٣}}{٦س^{٣}} = \frac{-٣}{٦} = \frac{-١}{٢}$

يمكن حل السؤال السابق بطريقة أخرى من خلال إخراج أكبر عامل مشترك في البسط وكذلك في المقام كما يلي :

$$\lim_{س \to \infty} \frac{٦س^{٢} - ٣س^{٣} + ٣س}{٦س^{٣} + ٤س - ١} = \lim_{س \to \infty} \frac{س^{٣}\left(\frac{٣}{س^{٢}} + ٣ - \frac{٦}{س}\right)}{س^{٣}\left(\frac{١}{س^{٣}} - \frac{٤}{س^{٢}} + ٦\right)} = \frac{\left(\frac{٣}{\infty^{٢}} + ٣ - \frac{٦}{\infty}\right)}{\left(\frac{١}{\infty^{٣}} - \frac{٤}{\infty^{٢}} + ٦\right)} = \frac{-٣}{٦} = \frac{-١}{٢}$$

كما يمكن الحل بطريقة ثالثة و هي قسمة جميع الحدود على المتغير الذي يحمل أكبر أس في المقدار كما يتضح هنا :

$$\lim_{س \to \infty} \frac{٦س^{٢} - ٣س^{٣} + ٣س}{٦س^{٣} + ٤س - ١} = \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٦س^{٢}}{س^{٣}} - \frac{٣س^{٣}}{س^{٣}} + \frac{٣س}{س^{٣}}}{\frac{٦س^{٣}}{س^{٣}} + \frac{٤س}{س^{٣}} - \frac{١}{س^{٣}}} = \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٦}{س} - \frac{٣}{١} + \frac{٣}{س^{٢}}}{\frac{٦}{١} + \frac{٤}{س^{٢}} - \frac{١}{س^{٣}}} = \frac{\left(\frac{٣}{\infty^{٢}} + ٣ - \frac{٦}{\infty}\right)}{\left(\frac{١}{\infty^{٣}} - \frac{٤}{\infty^{٢}} + ٦\right)} = \frac{-٣}{٦} = \frac{-١}{٢}$$

ونؤكد دائماً بأن الطريقتين الثانية والثالثة تصلح في حال كان السؤال سؤالاً مقالياً .. أما الطريقة الأولى فهي لاختصار الوقت في الأسئلة الموضوعية .

تدريب : أوجد : $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{٢س^{٤} - ٨س + ١}{٢س - ٤س^{٣} + ٧}$

سنقوم بحل هذا السؤال بطريقتين :

الطريقة الأولى : أكبر أس في البسط وأكبر أس في المقام

$$\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^{٤}}{-٤س^{٣}} = \lim_{س \to \infty} \frac{٢س}{-٤} = \frac{٢ \times \infty}{-٤} = -\infty$$

الطريقة الثانية : خلال إخراج أكبر عامل مشترك في البسط وكذلك في المقام

$$\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٤}\left(٢ - \frac{٨}{س^{٣}} + \frac{١}{س^{٤}}\right)}{س^{٣}\left(\frac{٧}{س^{٣}} + ٤ - \frac{٢}{س^{٢}}\right)} = \lim_{س \to \infty} \frac{س\left(٢ - \frac{٨}{س^{٣}} + \frac{١}{س^{٤}}\right)}{\left(\frac{٧}{س^{٣}} + ٤ - \frac{٢}{س^{٢}}\right)}$$

$$= \frac{\left(٢ - \frac{٨}{\infty^{٣}} + \frac{١}{\infty^{٤}}\right) \times \infty}{\left(\frac{٧}{\infty^{٣}} + ٤ - \frac{٢}{\infty^{٢}}\right)} = \frac{٢ \times \infty}{-٤} = -\infty$$

تدريب

احسب : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{|\text{٢س} + \text{٣}|}{\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤}}}$

نعيد تعريف المطلق في البسط $|\text{٢س} + \text{٣}| \leftarrow \text{٢س} + \text{٣}$ لأن $\text{س} \to +\infty$

ونخرج عامل مشترك داخل الجذر التربيعي $\text{س}^{\text{٢}}$ وكذلك نأخذ عامل مشترك في البسط $|\text{س}| = \text{س}$ لأن $\text{س} \to +\infty$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{٢س} + \text{٣}}{\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}\left(\text{١} - \frac{\text{٤}}{\text{س}^{\text{٢}}}\right)}} \Leftarrow \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}\left(\text{٢} + \frac{\text{٣}}{\text{س}}\right)}{|\text{س}|\sqrt{\left(\text{١} - \frac{\text{٤}}{\text{س}^{\text{٢}}}\right)}} \Leftarrow \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}\left(\text{٢} + \frac{\text{٣}}{\text{س}}\right)}{\text{س}\sqrt{\left(\text{١} - \frac{\text{٤}}{\text{س}^{\text{٢}}}\right)}} = \frac{\left(\text{٢} + \frac{\text{٣}}{\infty}\right)}{\sqrt{\left(\text{١} - \frac{\text{٤}}{\infty^{\text{٢}}}\right)}} = \frac{\text{٢}}{\text{١}} = \text{٢}$$

تدريب

$$\lim_{س \to \infty} \frac{(٢س^{٢} - ٣)^{٥} - ٤س^{٢}}{٢س^{٢} + ٥س^{٦}}$$

الحل

نهتم في مثل هذه المسألة بأكبر أس في البسط وفي المقام

$$\lim_{س \to \infty} \frac{٢^{٥} س^{٢ \times ٥}}{٥س^{٦}} = \lim_{س \to \infty} \frac{٣٢ س^{١٠}}{٥س^{٦}} = \lim_{س \to \infty} \frac{٣٢ س^{٤}}{٥} = \frac{٣٢}{٥} \times \infty^{٤} = \infty$$

تدريب

إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س^{٥} - ٧س^{٣}}{أس^{ن} - ٨س^{٢} + ٩} = ٤$ فأوجد قيمة : أ ، ن

الحل

∵ النهاية موجودة وتساوي : ٤

∴ أكبر أس في البسط = أكبر أس في المقام

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{٣س^{٥}}{أس^{٥}} = ٤ \leftarrow \frac{٣}{أ} = ٤$$

وبالضرب التبادلي : $\therefore أ = \frac{٣}{٤}$

تمرين : أوجد : $\lim\limits_{س \to -\infty} \sqrt{س^{٢} + ٣س} + س$

الحل عند التعويض المباشر نجد أن النتيجة : $\infty - \infty$ وهي كمية غير معرفة ، وبالتالي سنقوم بالضرب في المرافق

$$\lim_{س \to -\infty} \sqrt{س^{٢} + ٣س} + س \times \frac{\sqrt{س^{٢} + ٣س} - س}{\sqrt{س^{٢} + ٣س} - س} \leftarrow \lim_{س \to -\infty} \frac{(س^{٢} + ٣س) - س^{٢}}{\sqrt{س^{٢} + ٣س} - س} \leftarrow \lim_{س \to -\infty} \frac{٣س}{\sqrt{س^{٢} + ٣س} - س}$$

نأخذ عامل مشترك تحت الجذر : $س^{٢}$ ومن ثم سنخرج خارج الجذر : $|س|$ ونعوض عنها بـ : $-س$ لأن $س \to -\infty$

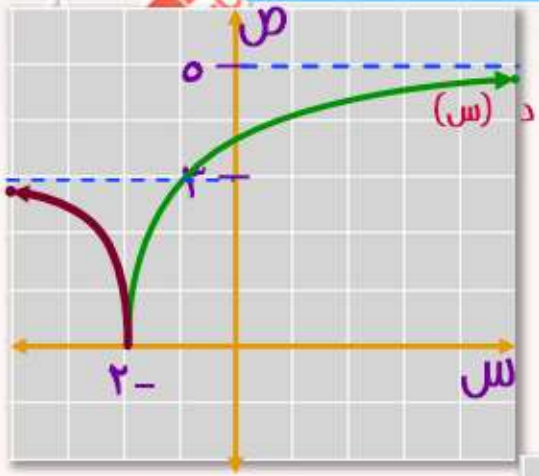
$$\lim_{س \to -\infty} \frac{٣س}{\sqrt{س^{٢}\left(١ + \frac{٣}{س}\right)} - س} \leftarrow \lim_{س \to -\infty} \frac{٣س}{|س| \sqrt{\left(١ + \frac{٣}{س}\right)} - س} \leftarrow \lim_{س \to -\infty} \frac{٣س}{-س \sqrt{\left(١ + \frac{٣}{س}\right)} - س}$$

نخرج (- س) عامل مشترك في المقام

$$\leftarrow \lim_{س \to -\infty} \frac{٣س}{-س\left(\sqrt{١ + \left(\frac{٣}{س} + ١\right)}\right)} = \frac{٣}{-\left(\sqrt{١ + \left(\frac{٣}{-\infty} + ١\right)}\right)} = \frac{٣}{-(١+١)} = \frac{-٣}{٢}$$

تمرين :

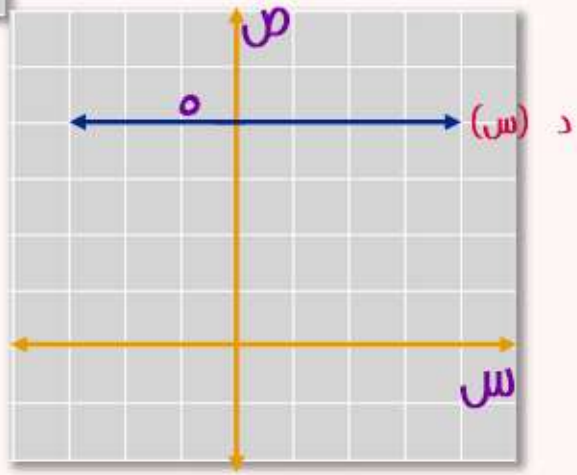
معتمدًا على الرسم أوجد :



١. $\lim_{س \to \infty} د(س) = ٥$

٢. $\lim_{س \to -\infty} د(س) = ٣$

تمرين : من الرسم أوجد :



١. $\lim_{س \to \infty} د(س) = ٥$

٢. $\lim_{س \to -\infty} د(س) = ٥$