haah959@gmail.com
hamad_alrudini
الرياضيات البحتة
الوحدة الأولى
النهايات والاتصال
الصف الثاني عشر
الفصل الدراسي الأول
قناة الأستاذ : حمد الرديني
التعليمية على اليوتيوب

بعد التعويض في الدوال الكسرية ينتج أحد الاحتمالات التالية :

[١] $\frac{\text{عدد حقيقي}}{\text{عدد حقيقي}}$: وتكون هنا النهاية موجودة ، وتساوي قيمة الكسر .

[٢] $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد حقيقي}}$: وتكون هنا النهاية موجودة ، وتساوي صفر .

[٣] $\frac{\text{عدد حقيقي}}{\text{صفر}}$: وهي كمية غير محددة ، وهنا تعتبر النهاية في المالانهاية .

[٤] $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$: وهي الأهم ، قيمة غير معلومة (غير معينة) ولحلها نلجأ إلى التخلص من الوضع الذي يسبب هذه القيمة عن طريق :

وهناك عمليات أخرى نستخدمها لإيجاد قيمة للنهاية .

لحل مسألة : ١) نعوض تعويض مباشر . ٢) إذا ظهرت نتيجة التعويض $\frac{0}{0}$ نلجأ إلى الطرق السابقة .

مثال

١ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ٥}{س + ١}$ الحل $\frac{٩ + ٥}{٤} = \frac{١٤}{٤} = ٣.٥$

٢ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ٤}{س - ٢}$ الحل $\frac{٤ + ٤}{0} = \frac{٨}{0} = \infty$

٣ $\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{س^٢ + ١}$ الحل $\frac{٣ - ٣}{٩ + ١} = \frac{0}{١٠} =$ صفر

مثال $\lim_{س \to -١} \frac{س^٢ - ٥س - ٦}{س^٢ - ١}$

الحل بالتعويض المباشر : $\frac{0}{0}$

نلاحظ أن هناك إمكانية لتحليل البسط والمقام كما يلي :

$$\lim_{س \to -١} \frac{(س + ١)(س - ٦)}{(س + ١)(س - ١)} = \lim_{س \to -١} \frac{(س - ٦)}{(س - ١)}$$

$$= \frac{(-١ - ٦)}{(-١ - ١)} = \frac{-٧}{-٢} = \frac{٧}{٢}$$

مثال $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٢٧}{س^٢ - ٩}$

الحل بالتعويض المباشر : $\frac{0}{0}$

نلاحظ أن هناك إمكانية لتحليل البسط والمقام كما يلي

$$\lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س^٢ + ٣س + ٩)}{(س - ٣)(س + ٣)} = \frac{(٣^٢ + ٣ \times ٣ + ٩)}{(٣ + ٣)} = \frac{٢٧}{٦} = \frac{٩}{٢}$$

مثال $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٢} + ٣س}{س}$

الحل

بالتعويض المباشر : $\frac{٠}{٠}$ وبأخذ عامل مشترك من البسط س :

$$\lim_{س \to ٠} \frac{س(س+٣)}{س} = \lim_{س \to ٠} (س+٣) = ٣$$

مثال $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س+٤} - ٢}{س}$

الحل

بالتعويض المباشر : $\frac{٠}{٠}$ هنا سنستخدم طريقة الضرب بالمرافق لإيجاد قيمة النهاية :

$$\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س+٤} - ٢}{س} \times \frac{\sqrt{س+٤} + ٢}{\sqrt{س+٤} + ٢} \Leftarrow \lim_{س \to ٠} \frac{س+٤-٤}{س\left(\sqrt{س+٤}+٢\right)} = \frac{١}{٤}$$

مثال $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{١}{٣+س} - \frac{١}{٣}}{س}$

الحل

بالتعويض المباشر : $\frac{٠}{٠}$ هنا سنستخدم طريقة توحيد المقام في البسط لإيجاد قيمة النهاية :

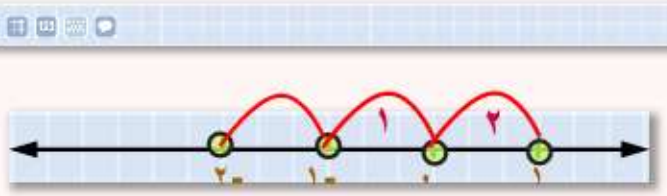
$$\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{٣-(٣+س)}{٣(٣+س)}}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{-س}{٣س(٣+س)} = \frac{-١}{٩}$$

تمرين

إذا كان : $د(س) = \begin{cases} [س+٢] & س \geq ٠ \\ \frac{|س|}{س} & س < ٠ \end{cases}$ أوجد : $\lim_{س \to ٠} د(س)$

الحل

بعد إعادة تعريف دالة الصحيح و المطلق ستتحول الدالة إلى الشكل التالي :



$$[س+٢] = \begin{cases} ١ & -١ \geq س > ٠ \\ ٢ & ٠ \geq س < ١ \end{cases} \leftarrow \frac{|س|}{س} = \begin{cases} -١ & س \geq ٠ \\ ١ & س < ٠ \end{cases} \leftarrow د(س) = \begin{cases} ١ & س \geq ٠ \\ ١ & س < ٠ \end{cases}$$

$\because \lim_{س \to ٠^+} د(س) = ١ = \lim_{س \to ٠^-} د(س)$ $\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = ١$