توزيع ذي الحدّين

يستخدم توزيع ذي الحدين في الحالات التي يكون للظاهرة محل الدراسة نتيجتان فقط متنافيتان، النتيجة محل الاهتمام (وتسمى بحالة النجاح)، والأخرى (تسمى بحالة الفشل) ومن أمثلة ذلك :

١ . عند إلقاء قطعة نقد (نتيجتان : صورة ، كتابة) .

٢ . نتيجة الطالب في الاختبار (ناجح ، راسب) .

٣ . نتيجة إعطاء مريض دواء (استجابة للدواء ، عدم استجابة)

٤ . نتيجة فحص عبوّة من التفّاح (سليمة ، معيبة)

وكل مما سبق من التجارب تتميّز بما يلي :

١ . تتكرّر التجربة عدّة مرّات .

٢ . لكل تجربة نتيجتان (نجاح ، فشل) .

٣ . احتمال النجاح ثابت واحتمال الفشل ثابت (التجارب المستقلّة) .

تعريف : يسمّى التوزيع الاحتمالي (ر) بذي الحدّين دالّة احتمال إذا أمكن كتابته على النحو التالي :

$$\text{ل}(\text{ر}) = \binom{\text{ن}}{\text{ر}} . \text{ب}^{\text{ر}} . (1 - \text{ب})^{\text{ن} - \text{ر}}$$

حيث : ١ . ب : $0 < \text{ب} \leq 1$

ملاحظة :

$$\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \frac{\text{ن}!}{\text{ر}!(\text{ن}-\text{ر})!}$$

٢ . ن : عدد مرّات تكرار التجربة

٣ . ب : احتمال النجاح (محل الاهتمام)

٤ . ١ – ب : احتمال الفشل

مثال

إذا كان نسبة الشفاء من مرض معين باستخدام أحد العقاقير الطبية = ٠,٦٠ ، فإذا تناول هذا العقار (٥) مصابين ، وإذا عرف المتغير العشوائي بأنه عدد الأشخاص الذين استجابوا للعقار (حالات الشفاء) ، فأوجد :

١ . اكتب شكل دالة الاحتمال

٢ . ما احتمال استجابة ٣ مرضى من هذا العقار.

٣ . ما احتمال استجابة مريض واحد على الأقل .

٤ . ما احتمال استجابة مريضين على الأكثر .

الحل

(١) ن = ٥ (٢) ب = ٠,٦٠ (احتمال النجاح – الشفاء – محل الاهتمام)

(٣)١ – ب = ٠,٤٠ (احتمال الفشل – عدم الاستجابة)

١ . $$ل(ر) = \binom{ن}{ر} . ب^{ر} . (١ - ب)^{ن-ر}$$

$$ل(ر) = \binom{٥}{ر} . (٠,٦٠)^{ر} . (٠,٤٠)^{٥-ر}$$ دالة الاحتمال

٢ . $$ل(ر = ٣) = \binom{٥}{٣} . (٠,٦٠)^{٣} . (٠,٤٠)^{٢}$$

$$= \frac{٥ \times ٤ \times ٣!}{٣! \times ٢!} \times ٠,٦٠^{٣} \times ٠,٤٠^{٢} = ٠,٣٤٥٦$$

٣ . $ل(س \geq ١) = ١ - ل(س = ٠)$

$$= ١ - \binom{٥}{٠} \times (٠,٦)^{٠} \times (٠,٤)^{٢}$$

$$= ١ - ١ \times (٠,٦)^{٠} \times (٠,٤)^{٢} = ١ - ١ \times ٠,٠١٠٢٤ = ٠,٩٨٩٧٦$$

٤ . $ل(س \leq ٢) = ل(س = ٠) + ل(س = ١) + ل(س = ٢)$

$$= ٠,٠١٠٢٤ + ٠,٠٧٦٨ + ٠,٢٣٠٤$$

$$= ٠,٣١٧٤٤$$

مثال

في تجربة إلقاء قطعة نقود خمسة مرات، إذا كان المتغير العشوائي عدد مرات ظهور صورة ، احسب :

١ . احتمال ظهور الصورة ٤ مرات ٢ . احتمال ظهور الصورة ٥ مرات

الحل

(١) ن = ٥ (٢) ب = ٠,٥ (٣) ١ – ب = ٠,٥

$$ل(س) = \binom{٥}{س} \times (٠,٥)^{س} \times (٠,٥)^{٥-س}$$

١ . $ل(س = ٤) = \binom{٥}{٤} \times (٠,٥)^{٤} \times (٠,٥)^{١} = \frac{٥ \times ٤!}{٤! \times ١!} \times \frac{١}{١٦} \times \frac{١}{٢} = \frac{٥}{٣٢}$

٢ . $ل(س = ٥) = \binom{٥}{٥} \times (٠,٥)^{٥} \times (٠,٥)^{٠} = ١ \times \frac{١}{٣٢} \times ١ = \frac{١}{٣٢}$

مثال

صندوق يحتوي على ست كرات بيضاء ، وأربع كرات حمراء ، فإذا تم سحب ٤ كرات على التوالي مع الإرجاع، إذا عرّف المتغير العشوائي بعدد الكرات البيضاء في الكرات المسحوبة فأوجد:

(١) احتمال ظهور كرة بيضاء واحدة (٢) احتمال ظهور ٣ كرات بيضاء

الحل

ن = ٤ ب = ٠,٦ (بيضاء) ١ – ب = ٠,٤

١ . $ل(س = ١) = \binom{٤}{١} \times (٠,٦)^{١} \times (٠,٤)^{٣}$

$= ٤ \times ٠,٦ \times ٠,٤^{٣} = \frac{٩٦}{٦٢٥}$

٢ . $ل(س = ٣) = \binom{٤}{٣} \times (٠,٦)^{٣} \times (٠,٤)^{١} = \frac{٢١٦}{٦٢٥}$

مثال

في تجربة إلقاء قطعة نقود ٣ مرات وحساب عدد مرات ظهور صورة ، استخدم نظرية ذات الحدين في إيجاد جدول التوزيع الاحتمالي.

الحل

- عناصر المتغير العشوائي = $\{٠، ١، ٢، ٣\}$
- عدد مرات تكرار التجربة = ن = ٣
- ل (ظهور صورة) = ٠,٥ ، ل (ظهور الكتابة) = ٠,٥

(١) $ل(س = ٠) = \binom{٣}{٠} \times (٠,٥)^{٠} \times (٠,٥)^{٣} = ١ \times ١ \times \frac{١}{٨} = \frac{١}{٨}$

(٢) $ل(س = ١) = \binom{٣}{١} \times (٠,٥)^{١} \times (٠,٥)^{٢} = ٣ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٨}$

(٣) $ل(س = ٢) = \binom{٣}{٢} \times (٠,٥)^{٢} \times (٠,٥)^{١} = ٣ \times \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٨}$

(٤) $ل(س = ٣) = \binom{٣}{٣} \times (٠,٥)^{٣} \times (٠,٥)^{٠} = ١ \times \frac{١}{٨} \times ١ = \frac{١}{٨}$

$\therefore$

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$