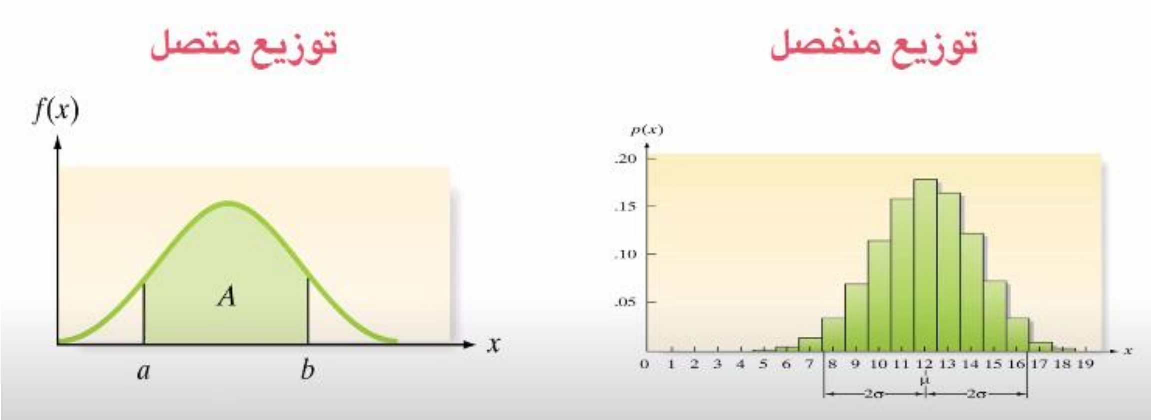
التوزيعات الاحتمالية المتصلة

المتغيرات العشوائية المتصلة هي التي تأخذ قيمًا متصلة وبالتالي تأخذ عدد لا نهائي من القيم الممكنة داخل مجاله، حيث أنه عند تمثيل البيانات على شكل مدرج تكراري نسبي نجد أن شكل هذا المدرج هو أقرب وصف لمنحنى التوزيع، وكلما ضاقت الفترات بين مراكز الفئات يمكن الحصول على رسم دقيق للمنحنى.



والمساحة أسفل المنحنى تعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية، لذلك تساوي هذه المساحة بــ ١ وتسمى ل(س) بدالة كثافة الاحتمال.

خصائص التوزيعات الاحتمالية المتصلة :

١ . جميع قيم الدالة ≥ صفر ⇐ فوق المحور السيني .

٢ . المساحة الكلية المحصورة بين المنحنى والمحور السيني = ١ .

٣ . ل (أ < س < ب) = المساحة بين المنحنى والمحور السيني والمستقيمات

س = أ ، س = ب

$$= \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ل(س) ءس}$$

٤ . يسمى منحنى دالة الكثافة بمنحنى التوزيع الاحتمالي .

مثال

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير (س) هو الدالة د(س) :

$$د(س) = \frac{١}{٢} - \frac{س}{٨} \quad ، \quad ٠ < س \leq ٤$$

١ . **أثبت أن د(س) دالة كثافة**

٢ . **أوجد ل (١ < س < ٣)**

الحل

١ . **نثبت بالتكامل**

$$\int_{٠}^{٤} (\frac{١}{٢} - \frac{س}{٨}) \, ءس = \frac{١}{٢} س - \frac{س^{٢}}{١٦} \Big|_{٠}^{٤} = ١ \quad \therefore د(س)$$ **دالة كثافة**

٢ . $ل(١ < س < ٣) = \int_{١}^{٣} (\frac{١}{٢} - \frac{س}{٨}) \, ءس = \frac{١}{٢} س - \frac{س^{٢}}{١٦} \Big|_{١}^{٣} = \frac{١}{٢}$

مثال

إذا كان س متغيرا عشوائيًا متصلًا دالته $= \frac{٢(١+س)}{٢٧}$ س $\in [٢، ٥]$:

١ . أثبت أن د(س) دالة كثافة احتمال.

٢ . أوجد ل (س) < ٤)

٣ . أوجد $ل(٣ \leq س < ٤)$

الحل

$$د(س) = \frac{٢}{٢٧} + \frac{٢}{٢٧}س$$

$\boxed{١}$ $$\int_{٢}^{٥} \left(\frac{٢}{٢٧} + \frac{٢}{٢٧}س\right) ءس = \frac{٢}{٢٧}س + \frac{٢}{٢٧}\frac{س^{٢}}{٢}\Big|_{٢}^{٥} = ١$$

$\therefore$ **د(س) دالة كثافة احتمال**

$\boxed{٢}$ $$ل\left(٢ < س < ٤\right) = \int_{٢}^{٤} \left(\frac{٢}{٢٧} + \frac{٢}{٢٧}س\right) ءس$$

$$= \frac{٢}{٢٧}س + \frac{٢}{٢٧}\frac{س^{٢}}{٢}\Big|_{٢}^{٤} = \frac{١٦}{٢٧}$$

$\boxed{٢}$ $$ل\left(٣ \le س < ٤\right) = \int_{٣}^{٤} \left(\frac{٢}{٢٧} + \frac{٢}{٢٧}س\right) ءس$$

$$= \frac{٢}{٢٧}س + \frac{٢}{٢٧}\frac{س^{٢}}{٢}\Big|_{٣}^{٤} = \frac{٩}{٢٧}$$

مثال

استخدم التكامل في إثبات أن الدالة : $د(س) = \frac{4 - |س - 4|}{16}$ س $\in [0، 8]$

هي دالة كثافة، ثم احسب احتمال أن نقطة ما من قيم س في الفترة $[2، 4]$

الحل

$$|س - 4| = \begin{cases} س - 4 & س \geq 4 \\ 4 - س & س < 4 \end{cases} \Leftarrow \frac{4 - |س - 4|}{16} = \begin{cases} \frac{4 - (س - 4)}{16} & س \geq 4 \\ \frac{4 - (4 - س)}{16} & س < 4 \end{cases}$$

$$\frac{4 - |س - 4|}{16} = \begin{cases} \frac{8 - س}{16} & س \geq 4 \\ \frac{س}{16} & س < 4 \end{cases}$$

$$\therefore \int_{0}^{8} د(س) = \int_{0}^{4} \frac{س}{16} ء س + \int_{4}^{8} \frac{8 - س}{16} ء س = \left. \frac{س^2}{32} \right|_{0}^{4} + \left. \frac{8س - \frac{س^2}{2}}{16} \right|_{4}^{8}$$

= ١

∴ د(س) دالة كثافة

$$ل(2 < س < 4) = \int_{2}^{4} د(س) ء س = \int_{2}^{4} \frac{س}{16} ء س = \left. \frac{س^2}{32} \right|_{2}^{4}$$

$$= \frac{16}{32} - \frac{4}{32} = \frac{3}{8}$$

مثال

تحقق من أن الدالة : $د(س) = \frac{٣}{٢٢}\left(٥ - س^{٢}\right)$ حيث $س \in [٠ ، ٢]$

دالة كثافة

الحل

$$ل(٠ < س < ٢) = \int_{٠}^{٢} \frac{٣}{٢٢}\left(٥ - س^{٢}\right) دس$$

$$= \frac{٣}{٢٢} \times \left[٥س - \frac{س^{٣}}{٣}\right]_{٠}^{٢} = \frac{٣}{٢٢} \times \left(\frac{٣٠ - ٨}{٣}\right) = \frac{٣}{٢٢} \times \frac{٢٢}{٣} = ١$$

$\therefore$ د(س) دالة كثافة

مثال

س متغير عشوائي بحيث أن : $د(س) = \begin{cases} س - ٣ & ٢ \leq س \leq ٣ \\ ٣ - س & ٣ < س \leq ٤ \end{cases}$

أثبت أن د(س) ليست دالة كثافة .

الحل

$$\int_{٢}^{٤} د(س) = \int_{٢}^{٣} (س - ٣) دس + \int_{٣}^{٤} (٣ - س) دس$$

$$= \left[\frac{س^{٢}}{٢} - ٣س\right]_{٢}^{٣} + \left[٣س - \frac{س^{٢}}{٢}\right]_{٣}^{٤} = -١$$

$\therefore$ د(س) ليست دالة كثافة

مثال

إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلًا دالته : $د(س) = أ(٦ - س)$

١ . أوجد قيمة $أ$ حيث $١ \leq س \leq ٥$

٢ . أوجد $ل(١ \leq س \leq ٤)$

الحل

$$ل(١ < س \leq ٥) = ١ = \frac{١}{٢}\left(د(١) + د(٥)\right) \times (٥ - ١)$$

$$= \frac{١}{٢} \times \left(\frac{٥}{١٢} + \frac{٢}{١٢}\right) \times ٣$$

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{٧}{١٢} \times ٣ = \frac{٢١}{٢٤}$$