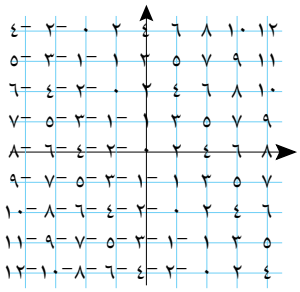
١-٣ البرمجة الخطيّة

تهتم الكثير من التطبيقات الرياضية في الإدارة والصناعة بالحصول على أعلى مكسب أو أقلّ تكلفة اعتمادًا على مجموعة من المُحدّدات (القيود)، مثل عدد العمّال أو الآلات المتوفِّرة أو رأس المال المتوفِّر.

عندما يُعبّر عن هذه المُحدّدات رياضيًّا، فإنها تتّخذ شكل المُتباينات، وعندما تكون هذه المُتباينات خطّية (مثل ٣س + ٢ص > ٦)، يُعرف ذلك في الرياضيات **بالبرمجة الخطّية**.

أكبر القيَم وأصغرها

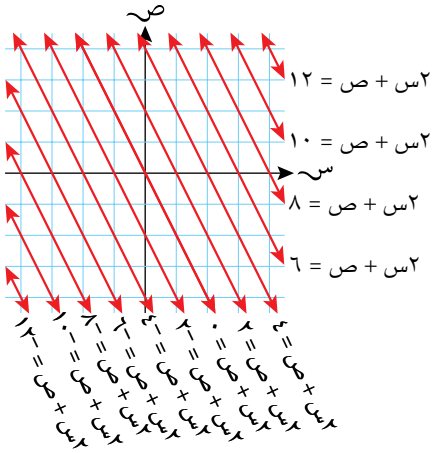
تأخذ العبارة الجبرية (٢س + ص) قيمة لكل نقطة (س، ص) في المستوى الإحداثي، ويبيّن الشكل المجاور قيم ٢س + ص على بعض نقاط الشبكة.



جـ هو قيمة الجزء المقطوع من محور الصادات.

إذا قمنا برسم خط مستقيم يصل بين جميع النقاط التي تعطي نفس القيمة، سيكون الناتج مستقيمات معادلاتها في صورة ٢س + ص = جـ (جـ ثابت).

يمكنك أن تلاحظ أنه كلما ازدادت قيمة جـ، يتحرّك المستقيم ٢س + ص موازيًا لنفسه نحو الأعلى إلى الجهة اليُمنى من الشبكة، وكلما نقصت قيمة جـ، يتحرّك المستقيم موازيًا لنفسه نحو الأسفل إلى الجهة اليُسرى من الشبكة.



(الشكل المجاور يوضّح المستقيمات ذات الثابت الزوجي فقط).

لا تكون للعبارة الجبرية (٢س + ص) أكبر قيمة أو أصغر قيمة ما لم تضع مُحدّدات لقيَم س، ص، حتى نستطيع إيجاد أكبر قيمة و/أو أصغر قيمة للعبارة الجبرية.

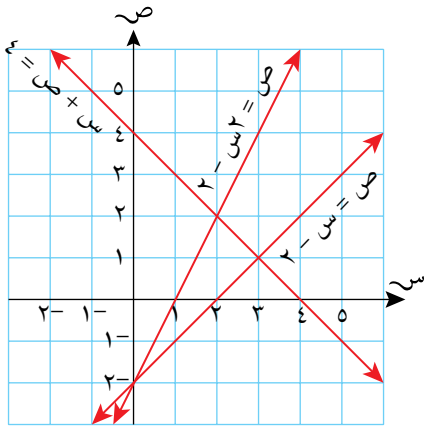
مثـــال ٧

يُحقِّق العددان س، ص جميع المُتباينات التالية:

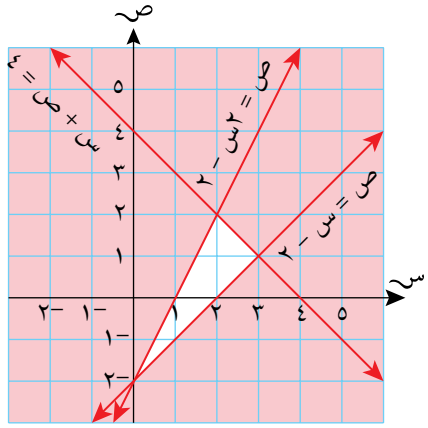
س + ص ≥ ٤، ص ≥ ٢س − ٢، ص ≤ س − ٢

أوجد أكبر قيمة وأصغر قيمة ممكنة للعبارة الجبرية (٢س + ص).

الحـــلّ:



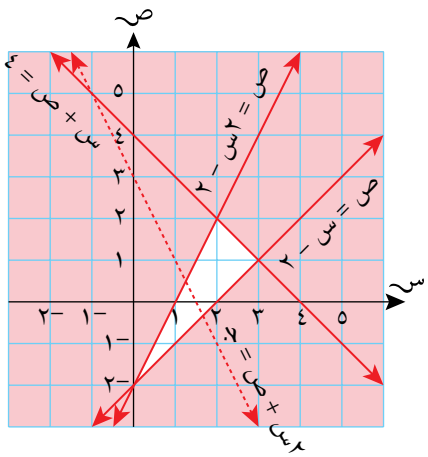
ابدأ برسم المستقيمات الثلاثة في نفس المستوى الإحداثي.



والآن، ظلّل الأجزاء التي لا تُمثِّل المُتباينات لتظهر المنطقة المُعرّفة لكل المتباينات. مثلاً، س + ص ≥ ٤ تعني أن منطقة الحل هي المنطقة الواقعة في أسفل الجهة اليسرى للمستقيم س + ص = ٤،

لذا عليك بتظليل المنطقة الواقعة في أعلى الجهة اليمنى للمستقيم (أي المنطقة التي لا تُمثِّل المُتباينة).

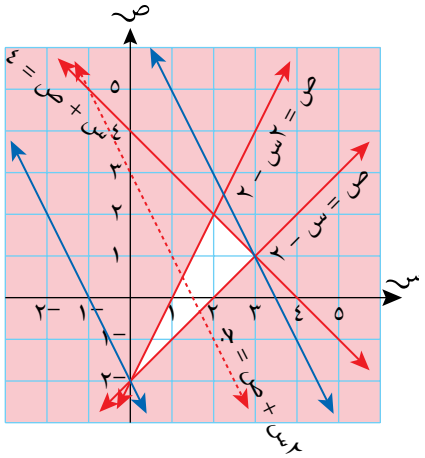
المنطقة التي تحقّق كل المتباينات هي المنطقة غير المُظلّلة الواقعة في الوسط.



نحتاج إلى إيجاد أكبر قيمة للعبارة الجبرية (٢س + ص).

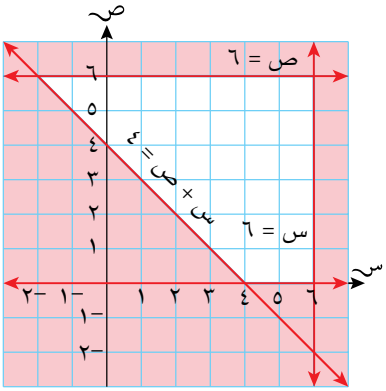
لذا عليك رسم مستقيم معادلته ٢س + ص = جـ (هنا تم اختيار مستقيم معادلته ٢س + ص = ٣)

كل المستقيمات ذات المعادلة ٢س + ص = جـ موازية للمستقيم الذي تم اختياره.



ضع مسطرة على المستقيم ٢س + ص = ٣، وحرّكها بحيث تبقى موازية لهذا المستقيم. ارسم مستقيمَين يمر أحدهما بالنقطة (٠، −٢) حيث توشك المسطرة الابتعاد عن المنطقة غير المُظلّلة ويمرّ الآخر بالنقطة (٣، ١) حيث توشك المسطرة الابتعاد عن المنطقة غير المُظلّلة أيضًا. ستجد أصغر قيمة للعبارة الجبرية عند النقطة (٠، −٢)، وأكبر قيمة لها عند النقطة (٣، ١). والآن عليك إيجاد قيمة (٢س + ص) في كل حالة من الحالتين: أصغر قيمة للعبارة الجبرية (٢س + ص) هي −٢ وأكبر قيمة لها هي ٧

تمارين ١-٣



١) إذا كانت المنطقة غير المُظلّلة في الشكل المجاور تُمثّل مجموعة المُتباينات س ⩾ ٠، ٦ ⩾ ص ⩾ ٠، س + ص ⩽ ٤، أوجد أكبر قيمة ممكنة وأصغر قيمة ممكنة للعبارة الجبرية (٣س + ٢ص) حيث أن س، ص تُحقّقان المُتباينات المُعطاة.

٢) أ ظلِّل المناطق التي لا تُمثّل كلاً من المُتباينات على شبكة إحداثيات لتُحدّد المنطقة التي تُحقّق حل المُتباينات ص ⩾ س، س + ص ⩾ ٦ ، ص ⩽ ٠

ب ما أكبر قيمة للعبارة الجبرية (٢س + ص) إذا كان س، ص يُحقّقان كل المُتباينات؟

٣) إذا كانت س، ص تُحقّقان كلاً من المُتباينات ص ⩽ ١، ص ⩾ س + ٣ ، ٣س + ٢ص ⩾ ١٢، أوجد أكبر قيمة وأصغر قيمة للعبارة الجبرية (س + ص).

٤) أراد طلاب الصف العاشر صنع أعلام وقمصان لبيعها من أجل دعم المدرسة، لكنّهم، (بسبب شروط الوقت)، لا يستطيعون تجهيز أكثر من ١٥٠ علمًا و١٢٠ قميصًا، علمًا أنّهم حصلوا من التبرُّعات على أقمشة كافية لتجهيز ٢٠٠ قطعة من النوعَين. فإذا كان العلم يُباع بسعر ٢ ريال عُماني والقميص بسعر ٥ ريالات عُمانية، فكم عدد كل من الأعلام والقمصان التي سوف يصنعونها ليحصلوا على أكبر دخل ممكن من المبيعات؟

٥) تريد مديرة مدرسة شراء خزائن لمكتبة المدرسة، وأمامها نوعان من الخزائن. سعر الخزانة من النوع (أ) ١٠ ريالات عُمانية وتحتاج إلى مساحة ٠,٦ م^{٢} وتتسع لـ ٠,٨ م^{٣} من الكتب، وسعر الخزانة من النوع (ب) ٢٠ ريالاً عُمانيًّا وتحتاج إلى مساحة ٠,٨ م^{٢} وتتسع لـ ١,٢ م^{٣} من الكتب. فإذا كانت أكبر مساحة متوفرة في المكتبة هي ٧,٢ م^{٢} والميزانية المتوفّرة هي ١٤٠ ريالاً عُمانيًّا، فما عدد ونوع الخزائن التي يجب أن تشتريها مديرة المدرسة لتحصل على أوسع مساحة ممكنة لتخزين الكتب من خلال صرف أقل مبلغ ممكن؟