٤-١ خصائص التماثُل في الدائرة

٤-١-أ الأوتار والمماسّات

سابقًا

تعرفت على الأوتار في الدائرة في الوحدة ٤ في الصف التاسع.

تتماثُل الدائرة حول أي قطر فيها (تماثُل حول محور) ولها تماثُل دوراني حول مركزها.

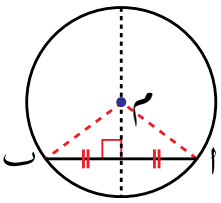
يمكن استخلاص مجموعة من النتائج من هاتَين الحقيقتَين:

١. يمر المُنصِّف العمودي للوتر بمركز الدائرة.

٢. تبعد الأوتار المتساوية مسافات متساوية عن مركز الدائرة.

٣. يتساوى طولا **المماسَّين** الخارجَين من نقطة خارج الدائرة إلى الدائرة نفسها.

١. يمرّ المُنصِّف العمودي للوتر بمركز الدائرة



المُنصِّف العمودي للوتر $\overline{ا ب}$ هو المسار الذي تتحرّك عليه نقطة تبعد **مسافات متساوية** عن النقطتَين ا، ب.

بما أن المركز م يبعد مسافات متساوية عن النقطتين ا، ب ($\overline{م ا}$، $\overline{م ب}$ نصفا قطرَين في الدائرة التي مركزها م)،

لذا، يجب أن تقع النقطة م على المُنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة ا ب.

ويمكن التعبير عن هذه النتيجة بطرق أخرى:

- يتقاطع العمود النازل من مركز الدائرة على الوتر في نقطة مُنتصَف الوتر.
- يكون المستقيم الواصل بين مركز الدائرة ونقطة مُنتصَف الوتر عموديًّا على الوتر.

يمكنك استخدام هذه الحقيقة لتجد أطوال الأوتار وأطوال أضلاع المُثلّث قائم الزاوية المرسوم بين المركز والوتر.

مُساعَدة

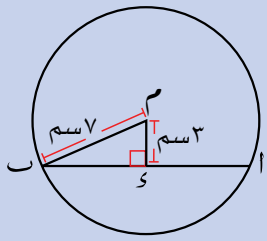
يُتوقَّع منك أن تذكر جميع التماثُلات وخصائص الزوايا لتكتبها عندما تجيب عن الأسئلة المرتبطة بها.

مثـال ١

$\overline{ا ب}$ وتر في دائرة نصف قطرها ٧ سم.

أوجد طول الوتر مُقرّبًا إلى أقرب منزلتَين عشريتَين

إذا علمت أن الوتر يبعد مسافة ٣ سم عن مركز الدائرة م.



الحـلّ:

$(ء ب)^{٢} = (م ب)^{٢} - (م ء)^{٢}$

$= ٧^{٢} - ٣^{٢}$

$= ٤٩ - ٩$

$= ٤٠$

$\therefore ء ب = \sqrt{٤٠}$

طول الوتر $ا ب = ٢ \times \sqrt{٤٠} = ١٢,٦٥$ سم

أعد ترتيب نظرية فيثاغورث.

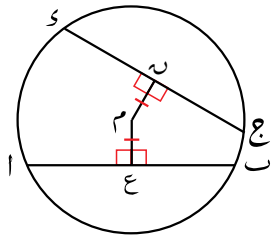
سابقًا

تعرّفت على نظرية فيثاغورث في الصف الثامن.

المسافة بين نقطة ومستقيم هي العمود النازل من النقطة على المستقيم، وهي أقصر مسافة بينهما.

٢. تبعد الأوتار المتساوية مسافات متساوية عن مركز الدائرة، وتكون الأوتار التي تبعد مسافات متساوية عن مركز الدائرة متساوية في الطول

إذا كان للوترَين $\overline{أب}$، $\overline{جـ ء}$ الطول نفسه، فإن م ع = م ن والعكس صحيح.

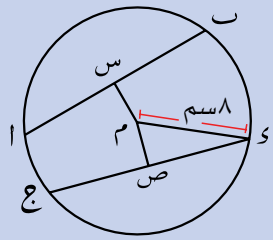


فكّر كيف تثبت تطابق المُثلّثَين م ا ع، م ء ن، تذكّر أن $\overline{م أ}$، $\overline{م ء}$ أنصاف أقطار في الدائرة.

وهذا صحيح لأن المُثلّثَين م ا ع، م ء ن متطابقان، ولأن للدائرة تماثُلاً دورانيًّا حول المركز م.

مثـال ٢

دائرة مركزها م ونصف قطرها ٨ سم.
$\overline{أب}$، $\overline{جـ ء}$ وتران في الدائرة، ا ب = ١٤ سم.
إذا كان م س = م ص، فأوجد طول $\overline{م ص}$ مُقرّبًا إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

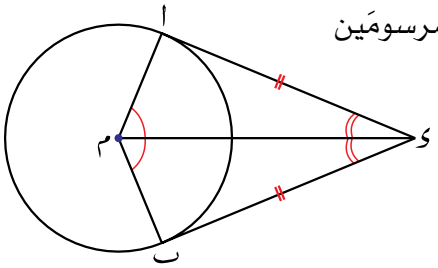


الحـلّ:

بما أنّ م س = م ص، فإن الوترَين يبعدان نفس المسافة عن المركز. أي، ا ب = جـ ء = ١٤ سم	$\overline{م ص}$ المنصِّف العمودي للوتر $\overline{جـ ء}$.
جـ ص = ص ء = ٧ سم	
ق(م ص̂ ء) = ٩٠°	
$(م ص)^{٢} = (م ء)^{٢} - (ص ء)^{٢}$	نظرية فيثاغورث.
$= ٨^{٢} - ٧^{٢}$	
$= ٦٤ - ٤٩$	
$= ١٥$	
$\therefore$ م ص = $\sqrt{١٥}$ = ٣,٨٧ سم	

٣. يتساوى طولا المماسَّين الخارجَين من نقطة خارج الدائرة إلى الدائرة نفسها

النقطتان ا، ب هما نقطتا التماسّ بين المماسَّين المرسومَين من النقطة ء إلى الدائرة.
النتيجة هي ء ا = ء ب



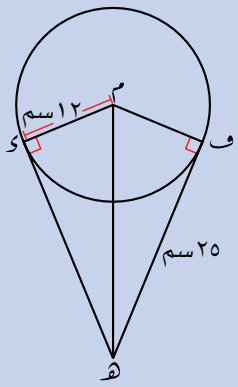
وينتج من ذلك أن:

- المماسَّان **يقابلان** زاويتَين متساويتَين في القياس عند المركز، أي أنّ:
  ق(ك $\hat{م}$ ا) = ق(ك $\hat{م}$ ب)
- المستقيم الواصل بين المركز ونقطة تقاطع المماسَّين يُنصِّف الزاوية المحصورة بين المماسَّين، أي أنّ: ق(م $\hat{ك}$ ا) = ق(م $\hat{ك}$ ب)

ويتَّضح أيضًا أن الشكل مُتماثِل حول المستقيم م ك، كما يمكن إثبات ذلك عبر برهنة تطابُق المُثلّثَين م ا ك، م ب ك. للقيام بذلك، تحتاج إلى استخدام حقيقة أن 'المماس عمودي على نصف القطر عند نقطة التماسّ'.

مثـــال ٣

أوجد الطولَين ك هـ، م هـ في الشكل المجاور مُقرَّبَين إلى أقرب منزلتَين عشريتَين عند الحاجة.



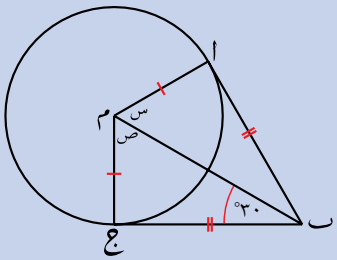
الحـــلّ:

ك هـ = ف هـ = ٢٥ سم	المماسان متساويان.
∴ ك هـ = ٢٥ سم	
(م هـ)^{٢} = (ك هـ)^{٢} + (ك م)^{٢}	نظرية فيثاغورث.
= ^{٢}١٢ + ^{٢}٢٥	
= ١٤٤ + ٦٢٥	
= ٧٦٩	
م هـ = $\sqrt{٧٦٩}$ = ٢٧,٧٣ سم	

مثـــال ٤

أوجد قيمة س، ص في الشكل المجاور.

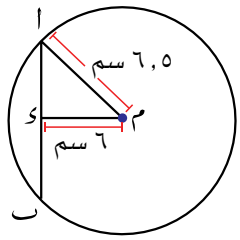
الحـــلّ:

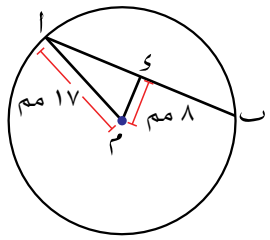


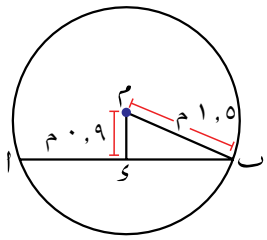
ق(م $\hat{ج}$ ب) = ٩٠°	$\overline{م ج}$ عمودي على المماس $\overline{ج ب}$.
∴ ص = ١٨٠° − ٩٠° − ٣٠°	مجموع قياسات زوايا المُثلّث يساوي ١٨٠°
ص = ٦٠°	المماسان يقابلان زاويتَين متطابقتَين عند المركز.
ص = س = ٦٠°	

تمارين ٤-١-أ

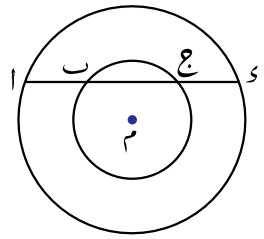
١) احسب طول الوتر $\overline{أب}$ في كل من الدوائر التالية، علمًا بأن س هي نقطة مُنتصَف الوتر $\overline{أب}$:

أ


ب


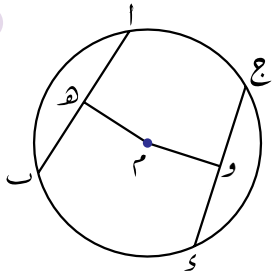
ج


٢) في الشكل المجاور م مركز للدائرتَين، يقطع المستقيم الدائرتَين في النقاط ء، ج، ب، أ على الترتيب.
أثبت أن أ ب = ج ء.

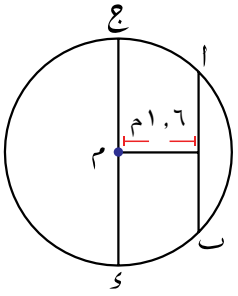


الدائرتان المتحدتان في المركز لهما نصفا قطرَين مختلفان والمركز نفسه.

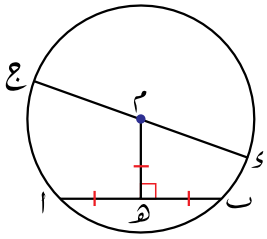
٣) طبِّق ما تعلّمته حول خصائص الدائرة لإيجاد طول قطر كل دائرة من الدوائر التالية موضّحًا خطوات الحل، واكتب إجابتك مُقرّبة إلى أقرب عدد مُكوّن من ٣ أرقام معنوية:

أ


أ ب = ج ء = ١١,٤ سم
م و = ٦,٥ سم

ب


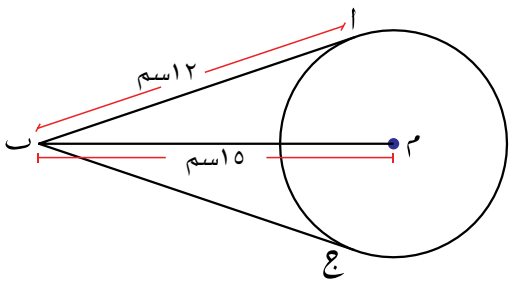
أ ب = ٢,٨ م

ج


أ ب = ٢٢ مم

٤) دائرة نصف قطرها ٨,٤ سم، فيها وتر يبعد مسافة ٥ سم عن مركزها. احسب طول الوتر مُقرّبًا إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

٥) في الشكل المجاور:
أوجد طول $\overline{أم}$ ومساحة الشكل الرباعي أ م ج ب. حيث $\overline{ب أ}$، $\overline{ب ج}$ مماسَّان للدائرة.



٦) في الشكل المجاور:
$\overline{أب}$، $\overline{أ ء}$ مماسَّان للدائرة،
تقع النقاط ا، ب، ج على نفس المستقيم.
احسب قيمة س.

