٤-٢ العلاقات بين الزوايا في الدائرة

٤-٢-أ نظريات في الدائرة

تمتلك الدوائر عدة خصائص للزوايا يمكن توظيفها في حل المسائل.

سوف تكتشف في هذا الدرس الكثير من هذه الخصائص، وسوف تساعدك الأمثلة والنظريات التالية على حل المسائل التي تتضمّن الزوايا والدوائر.

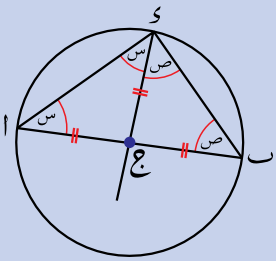
قياس الزاوية المحيطية في نصف الدائرة المرسومة على القطر يساوي ٩٠°

اقرأ المثال التالي لتعرف كيف تحسب قياس الزاوية في نصف الدائرة.

مثـال ٥

$\overline{أ ب}$ قطر في دائرة مركزها ع، ء نقطة على محيطها.

احسب ق(أ ء̂ ب).

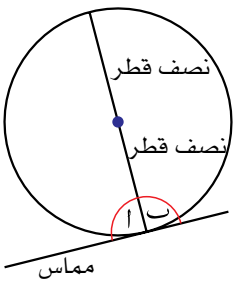


الحـلّ:

أ ع = ع ب = ع ء	أنصاف أقطار في الدائرة.
∴ المثلثان أ ع ء، ب ع ء مُتطابقا الضلعَين.	
أي ق(ع أ̂ ء) = ق(ع ء̂ أ) = س	
و ق(ع ء̂ ب) = ق(ع ب̂ ء) = ص	
ولكن ٢س + ٢ص = ١٨٠°	مجموع قياسات زوايا المُثلّث أ ب ء يساوي ١٨٠°
فيكون س + ص = ٩٠°	
∴ ق(أ ء̂ ب) = ٩٠°	

قياس الزاوية المحصورة بين مماس الدائرة ونصف قطرها يساوي ٩٠°

في الشكل المجاور:



بما أن القطر يقسم الدائرة إلى قسمَين متطابقَين.

∴ أ = ب

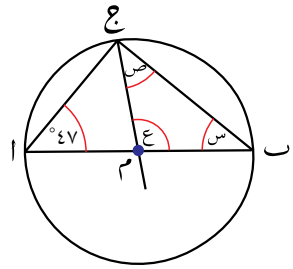
و أ + ب = ١٨٠° (زاويتان على خط مستقيم).

∴ أ = ب = ٩٠°

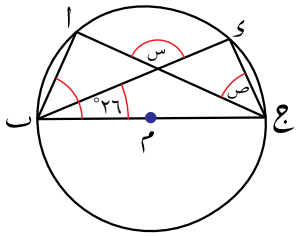
تمارين ٤-٢-أ

١) اوجد قياس كل زاوية من الزوايا المشار إليها بحرف في كل مما يلي. فسِّر إجابتك.

أ

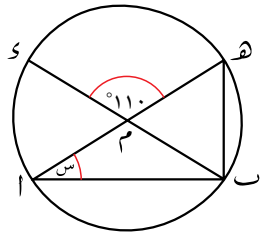


ب

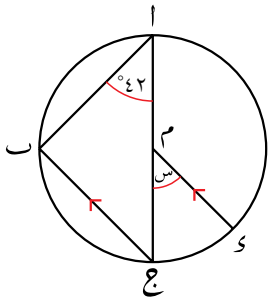


ق(ا ⌒ ج) = ٦٠°

ج

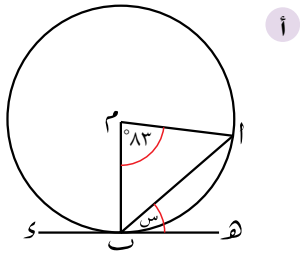


د

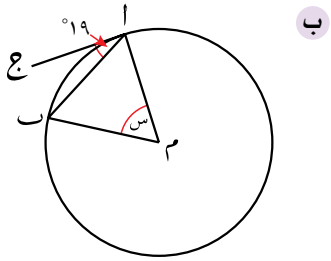


٢) أوجد قيمة س في كل شكل من الأشكال التالية. فسِّر إجابتك.

أ



ب

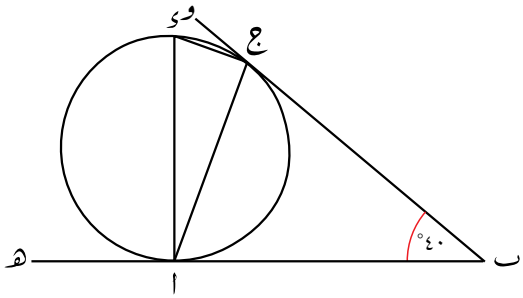


٣) في الشكل المجاور:

$\overline{ب و}$ ؛ $\overline{ب هـ}$ مماسَّان للدائرة عند النقطتَين ج، ا بالترتيب.

$\overline{اء}$ قطر في الدائرة.

ق(ا ⌒ ج) = ٤٠°



أ أثبت أن المُثلّث ا ب ج مُتطابِق الضلعَين.

ب احسب قياس كل من:

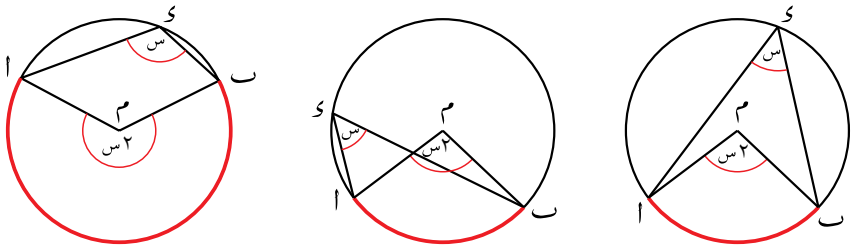
(١) ج $\hat{أ}$ ب

(٢) ء $\hat{أ}$ ج

(٣) ا $\hat{ء}$ ج

٤-٢-ب المزيد من النظريات في الدائرة

قياس الزاوية المركزية يساوي ضعف قياس الزاوية المحيطية المقابلة للقوس نفسه.

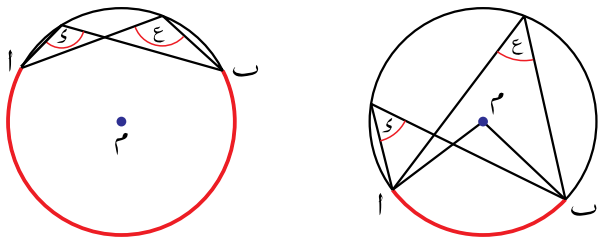


$\overset{\frown}{أب}$ **قوس** في الدائرة التي مركزها م. والنقطة ك تقع على محيطها، وليس على القوس $\overset{\frown}{أب}$. تنصّ نظرية الزاوية المركزية على:

ق(ا $\hat{م}$ ب) = ٢ × ق(ا $\hat{ك}$ ب)

وكما لاحظت سابقًا، تصحّ هذه النظرية عندما يكون القوس $\overset{\frown}{أب}$ نصف دائرة. تنصّ نظرية الزاوية المركزية على أن قياس الزاوية المحيطية المرسومة على قطر يساوي ٩٠°، وسبب ذلك أن الزاوية ا م ب زاوية مستقيمة (قياسها ١٨٠°).

الزوايا المحيطية التي تُقابل نفس الوتر متساوية في القياس

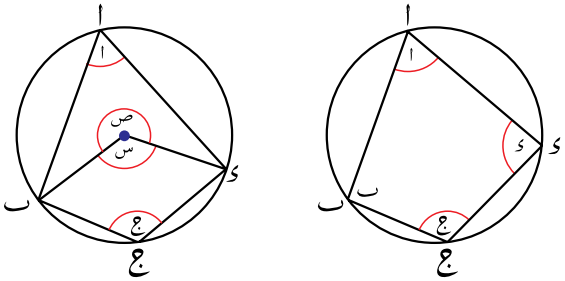


في هذين الشكلَين: ق($\hat{ك}$) = ق($\hat{ع}$)، ويساوي نصف قياس الزاوية المركزية المُقابِلة للقوس $\overset{\frown}{أب}$.

مجموع قياسي الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعي الدائري يساوي ١٨٠°.

تقع رؤوس **الشكل الرباعي الدائري** على محيط الدائرة.

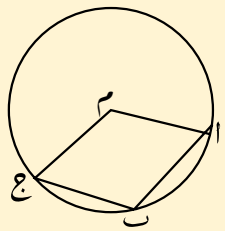
انظر إلى الشكل المجاور:



س = ٢ ا (نظرية الزاوية المركزية، تقابل القوس الأصغر $\overset{\frown}{ب ك}$)

ص = ٢ ع (نظرية الزاوية المركزية، تقابل القوس الأكبر $\overset{\frown}{ب ا ك}$)

يذكر الخطأ الشائع أن الشكل الرباعي التالي دائريًّا.



يجب أن تتحقق من أن الرؤوس الأربعة تقع على محيط الدائرة حتى يكون شكلًا رباعيًّا دائريًّا.

فيكون، س + ص = ٢ أ + ٢ ج

لكن س + ص = ٣٦٠° (زوايا حول نقطة)

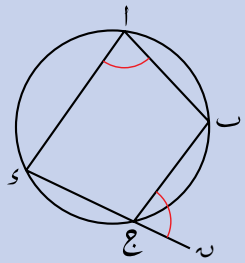
∴ أ + ج = ١٨٠° (مجموع قياسَي الزاويتَين المتقابلتَين في الشكل الرباعي الدائري).

وللسبب نفسه، ب + ء = ١٨٠°

قياس الزاوية الخارجية في الشكل الرباعي الدائري يساوي قياس الزاوية الداخلية المُقابِلة للزاوية المجاورة لها

مثـــال ٦

استخدم الشكل المجاور لتثبت أن ق(∠هـ ج ب) = ق(∠ب أ ء)



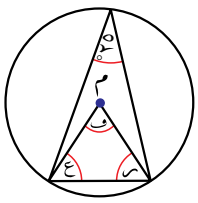
الحـــلّ:

ق(∠هـ ج ب) + ق(∠ب ج ء) = ١٨٠°	زاوية مستقيمة.
ق(∠ب أ ء) + ق(∠ب ج ء) = ١٨٠°	
∴ ق(∠هـ ج ب) = ق(∠ب أ ء)	زاويتان مُتقابِلتان في شكل رباعي دائري.

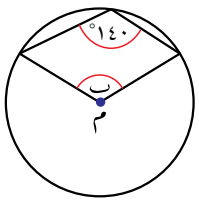
تمارين ٤-٢-ب

١) أوجد قياس كل زاوية من الزوايا المشار إليها بحرف في كل مما يلي، حيث م مركز الدائرة:

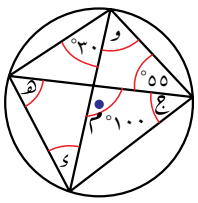
أ



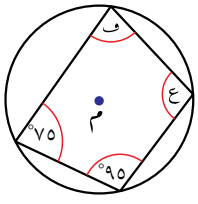
ب



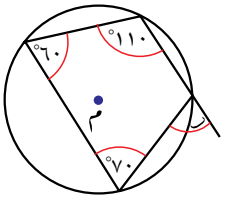
ج



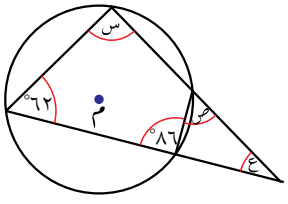
د



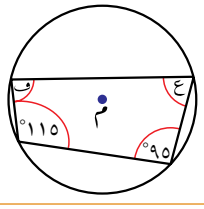
هـ



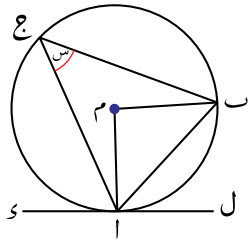
و



ز



٢) في الشكل المجاور:



ك ل مماس للدائرة عند النقطة ا.

تقع النقطتان ب، ع على المحيط،

م مركز الدائرة. و(ا $\hat{ع}$ ب) = س

أوجد بدلالة س قياس كل من الزوايا التالية:

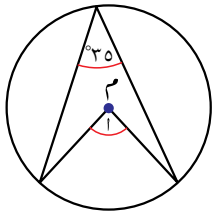
أ (ا $\hat{م}$ ب)

ب (م $\hat{ا}$ ب)

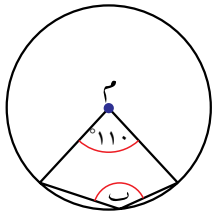
ج (ب $\hat{ا}$ ل)

٣) أوجد قياس كل من الزوايا المشار إليها بحرف في كل مما يلي، حيث م مركز الدائرة:

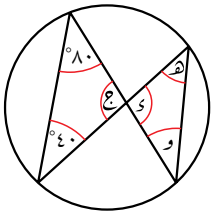
أ



ب



ج



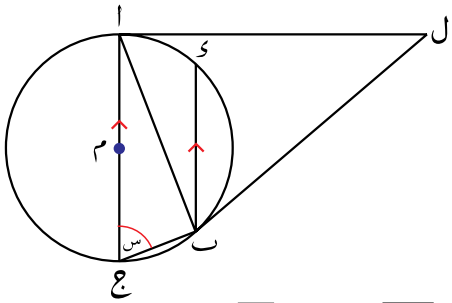
٤) في الشكل المجاور:

دائرة مركزها م.

ل ا، ل ب مماسَّان

للدائرة من النقطة ل.

ا ع قطر في الدائرة، و(ا $\hat{ع}$ ب) = س.



أ اكتب و(ع $\hat{ا}$ ب) بدلالة س

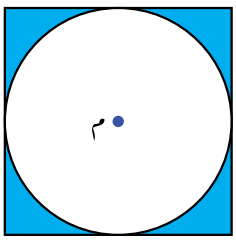
ب اكتب و(ا $\hat{ل}$ ب) بدلالة س

ج تقع النقطة ك على محيط الدائرة بحيث يكون ب ك موازيًا لـ ع ا.

اكتب و(ك $\hat{ب}$ ل) بدلالة س

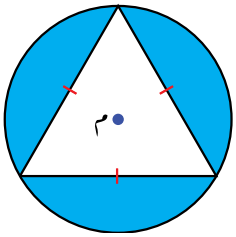
طبّق مهاراتك

٥) يبيّن الشكل المجاور قرصًا دائريًّا تم قصّه من صفيحة فضّية مُربّعة الشكل، نصف قطر القرص ١٥ مم ومركزه م:

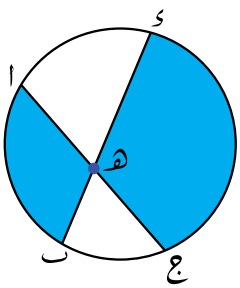


أ احسب طول ضلع الصفيحة المُربّعة ومساحتها قبل القص.

ب احسب مساحة المنطقة المتبقّية من الصفيحة المُربّعة بعد قصّ القرص الدائري منها.



٦) تُصمِّم مريم شعارات، بحيث تُلصق مُثلّثًا مُتطابَق الأضلاع على قرص دائري، كما هو مبيّن في الشكل المجاور. إذا كان طول ضلع المُثلَّث ١٥ سم، فأوجد طول قطر القرص الدائري.

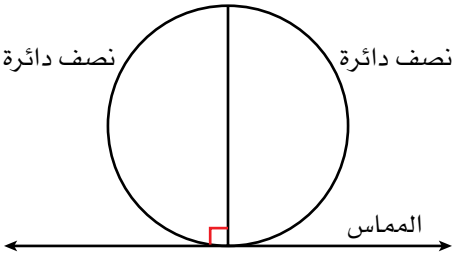


٧) يبيّن الشكل المجاور وترَين $\overline{ا ج}$، $\overline{ب ء}$ في دائرة، ويتقاطع الوتران في النقطة هـ:

أ) استخدم خصائص الزوايا لتبيّن أن المُثلّثَين ا ب هـ، ء ج هـ متشابهان.

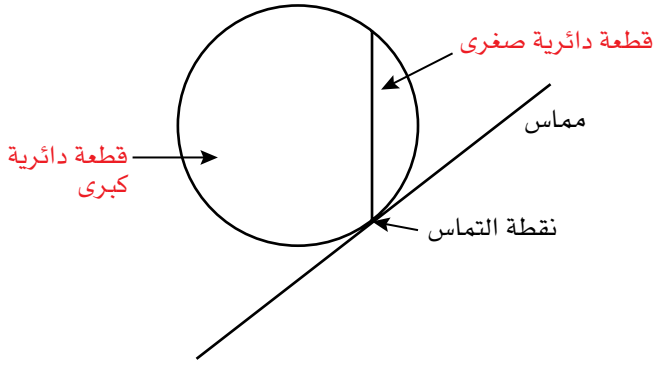
ب) استخدم حقيقة أن المُثلّثَين متشابهان لتبيّن أن:
ا هـ × ج هـ = ب هـ × ء هـ

٤-٢-ج نظرية القطعة الدائرية المُتبادَلة

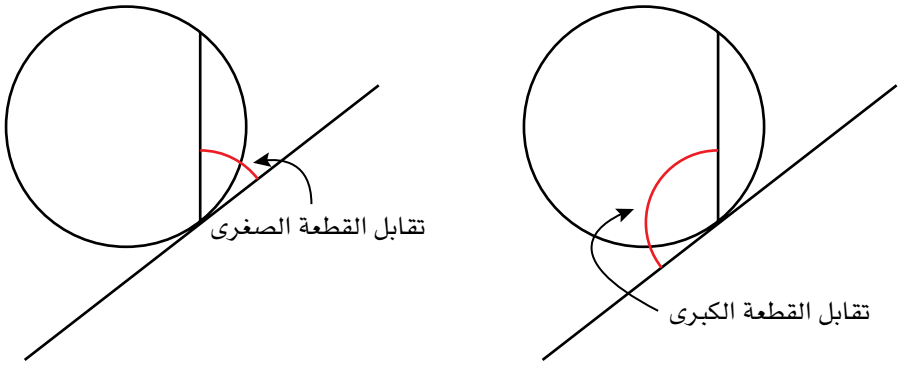


تعلّمت سابقًا أن المماس والقطر يشكِّلان زاوية قائمة عند نقطة تقاطعهما، وأن القطر يقسم الدائرة إلى نصفَي دائرة.

تعلّمت أيضًا أن قطر الدائرة هو وتر يمر بمركزها، وأنه عندما يقطع الوتر المماس ولا يمر في المركز، فإنه يقسم الدائرة إلى قطعة كبرى وقطعة صغرى، وأن نقطة تقاطُع الوتر مع المماس تُسمّى نقطة التماس.

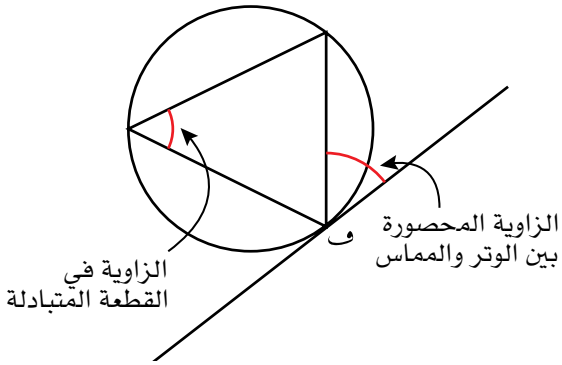


يمكنك أن ترسم زاويتَين بين المماس والوتر، بحيث تكون إحداهما تقابل القطعة الكبرى والأخرى تقابل القطعة الصغرى.



تُسمّى القطعة التي لا تقابل الزاوية **القطعة المُتبادَلة**.

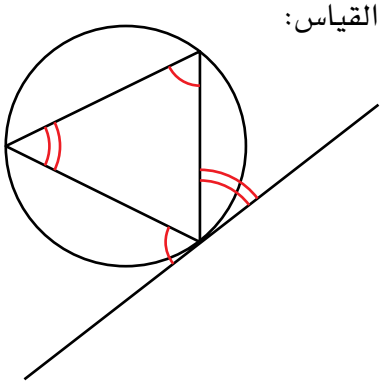
ارسم زاوية في القطعة المُتبادَلة.



استكشاف

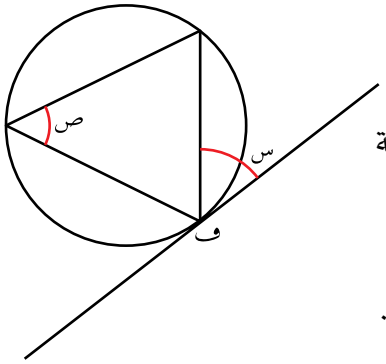
- ارسم ٣ دوائر كبيرة.
- ارسم مماسًّا لكل دائرة بأفضل دقة ممكنة، بحيث يلامس الدائرة مرة واحدة فقط.
- ارسم وترًا يتقاطع مع المماس.
- ارسم زاوية بين الوتر والمماس، يمكنك اختيار إحدى الزاويتَين.
- اختر القطعة المُتبادَلة وارسم فيها زاوية محيطية.
- أوجد، بأفضل دقة ممكنة، قياس الزاوية المحصورة بين المماس والوتر وزاوية القطعة المُتبادَلة في الجهة الأخرى.
- ماذا تلاحظ؟

تنصّ نظرية القطعة المُتبادَلة على أن قياس الزاوية المحصورة بين المماس والوتر يساوي قياس الزاوية المحيطية المرسومة في القطعة المُتبادَلة وتُقابِل القوس نفسه. يبيّن الشكل التالي الزوايا المتساوية في القياس:



برهنة نظرية القطعة المُتبادَلة

سوف تستخدم في هذا البرهان بعض النظريات التي تعلّمتها سابقًا.

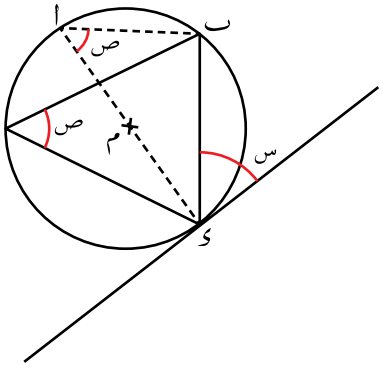


ارسم دائرة ووترًا ومماسًّا وحدِّد الزاوية المحصورة بين المماس والوتر، وسمّها س، وحدِّد زاوية القطعة المُتبادَلة وسمّها ص.

تعرف أن قياسَي الزاويتين المحيطيتَين المرسومتَين في نفس القطعة واللتَين تقابلان نفس القوس متساويان.

هذا يعني أنك تستطيع رسم زاوية أخرى في القطعة المُتبادَلة مستخدمًا القطر كأحد ضلعَي الزاوية، وتعرف أيضًا أن قياسها يساوي ص:

في الشكل المجاور:



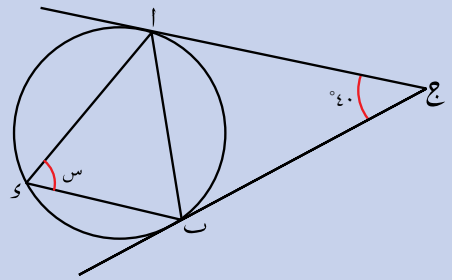
يمكنك أن تلاحظ أن المُثلّث ك ب ا قائم الزاوية في ب، لأنه مرسوم على قطر الدائرة. هذا يعني أن ق(ا $\hat{}$ ك ب) يساوي ٩٠° – ص

تعلم أيضًا أن قياس الزاوية بين القطر والمماس يساوي ٩٠°، مما يعني أن ٩٠° – ص + س = ٩٠°

وهذا يثبت أن س = ص

مثــال ٧

أوجد قيمة س في الشكل المجاور.



الحــلّ:

ق(ا $\hat{}$ ج) + ق(ب $\hat{}$ ا ج) + ٤٠° = ١٨٠°

∴ ق(ا $\hat{}$ ج) = ق(ب $\hat{}$ ا ج) = ٧٠°

وباستخدام نظرية القطعة المُتبادَلة نجد أن:

ق(ا $\hat{}$ ج) = ق(ا $\hat{}$ ك ب) = ٧٠°

∴ س = ٧٠°

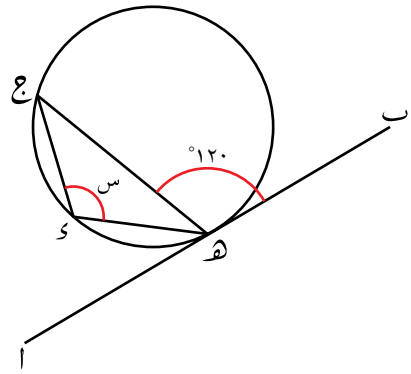
مجموع قياسات زوايا المُثلّث يساوي ١٨٠°.

المُثلّث ا ب ج مُتطابِق الضلعَين لأن $\overline{\text{ا ج}}$، $\overline{\text{ب ج}}$ مماسّان للدائرة.

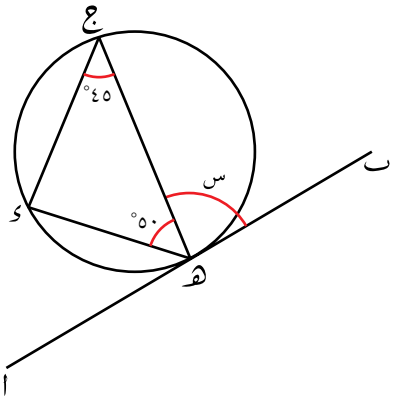
تمارين ٤-٢-ج

١) أوجد قيمة س في كل شكل من الأشكال التالية. فسِّر إجابتك.

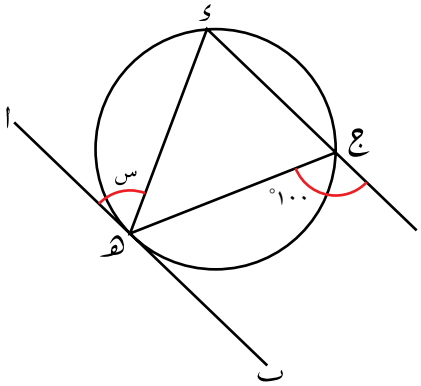
أ



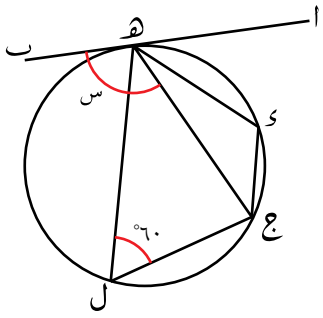
ب



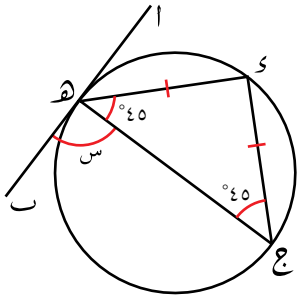
ج



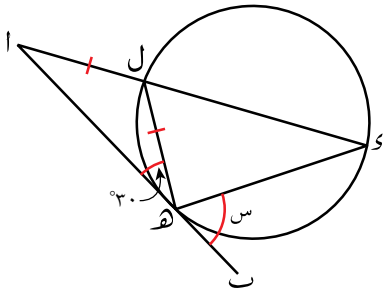
د



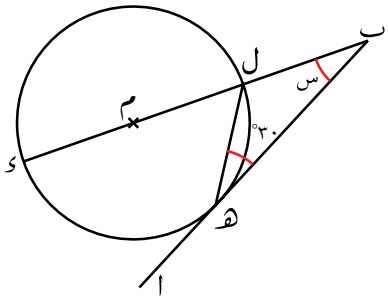
هـ



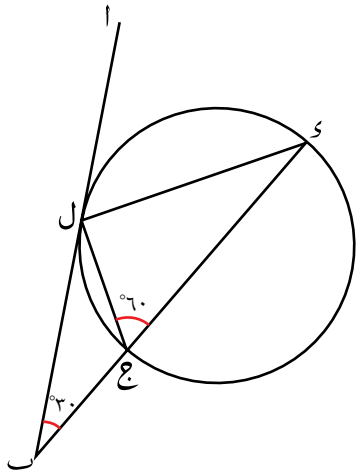
و



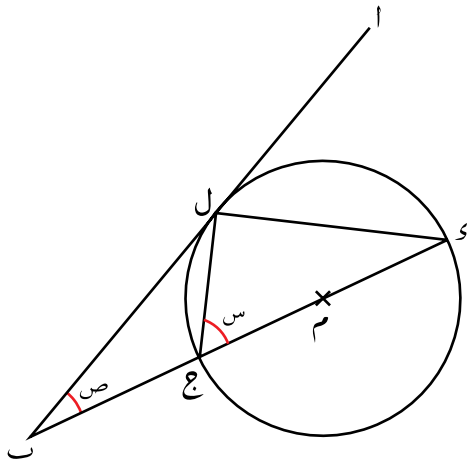
ز



٢) في الشكل المجاور:
أثبت أن $\overline{ج ك}$ قطر في الدائرة.



٣) في الشكل التالي: أثبت أن ٢س – ص = ٩٠° علمًا بأن م مركز الدائرة وأن $\overline{ب ا}$ مماس للدائرة عند النقطة ل.



٤) أوجد قيمة س في الشكل التالي:

