٢-٥ الجداول التكرارية

٥-٢-أ حساب المقاييس الإحصائية للبيانات التكرارية

درست سابقًا كيفية إيجاد المقاييس الاحصائية لمجموعة بيانات بسيطة، ولكن عندما يكون لديك مجموعة بيانات عدد قيَمها أكبر من ٢٠، يُفضّل أن تعُدّ البيانات التي لها القيمة نفسها معًا وتُسجّلها في جدول، يُسمّى بالجدول التكراري، أو التوزيع التكراري.

البيانات الموضَّحة في جدول توزيع تكراري



إذا رميت حجر نرد سداسي الأوجه ١٠٠ مرّة، سوف يظهر كل رقم من الأرقام الستّة عدّة مرّات. يمكنك أن تُسجِّل عدد مرّات الظهور على النحو التالي:

الرقم الظاهر على الوجه العلوي	١	٢	٣	٤	٥	٦
التكرار	١٦	١٣	١٤	١٧	١٩	٢١

الوسط الحسابي

لتجد الوسط الحسابي، تحتاج أوّلاً إلى إيجاد مجموع الأرقام الظاهرة على وجه حجر النرد عند رميه ١٠٠ رمية. مجموع ظهور الرقم (١) ستّ عشرة مرّة يساوي ١ × ١٦ = ١٦، ومجموع ظهور الرقم (٢) ثلاث عشرة مرة يساوي ٢ × ١٣ = ٢٦ وهكذا. يمكنك أن توسِّع جدولك لتُبيّن ذلك:

الرقم الظاهر على وجه حجر النرد	التكرار	التكرار× الرقم الظاهر على وجه النرد
١	١٦	١ × ١٦ = ١٦
٢	١٣	٢ × ١٣ = ٢٦
٣	١٤	٣ × ١٤ = ٤٢
٤	١٧	٤ × ١٧ = ٦٨
٥	١٩	٥ × ١٩ = ٩٥
٦	٢١	٦ × ٢١ = ١٢٦
المجموع	١٠٠	٣٧٣

مُساعَدة

يمكنك إضافة أعمدة إلى الجدول المعطى ليساعدك على تنظيم الحسابات بكل وضوح.

نحصل على المجموع الكلّي لـ ١٠٠ رمية من جمع القيَم الموجودة في العمود الثالث:

= ١٦ + ٢٦ + ٤٢ + ٦٨ + ٩٥ + ١٢٦

= ٣٧٣

$$\therefore \text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع الأرقام الظاهرة}}{\text{عدد الرميات}} = \frac{٣٧٣}{١٠٠} = ٣,٧٣$$

الوسيط

تمّ رمي حجر النرد ١٠٠ مرّة، وهذا عدد زوجي. لذا سيكون الوسيط هو الوسط الحسابي لزوج القيَم الذي يقع في المُنتصف. سوف يكون موقع القيمة الأولى هو $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠، وموقع القيمة الثانية $\frac{١٠٠}{٢}$ + ١ = ٥١

الرقم الظاهر على وجه حجر النرد	التكرار
١	١٦
٢	١٣
٣	١٤
٤	١٧
٥	١٩
٦	٢١

١٦ ، ٢٩ ، ٤٣ ، ٦٠

مجموع تكرارات القيمة (١) يساوي ١٦

ومجموع تكرارات القيمتَين (١) و(٢) يساوي ٢٩

ومجموع تكرارات القيَم (١) و(٢) و(٣) يساوي ٤٣

ومجموع تكرارات القيَم (١) و(٢) و(٣) و(٤) يساوي ٦٠،

وهذا يعني أن القيمة ٥٠ والقيمة ٥١ هما أربعات.

∴ الوسط الحسابي للقيمتَين ٤ و٤ هو ٤، وهذه القيمة هي الوسيط.

المنوال

لتجد المنوال ببساطة تحتاج إلى إيجاد الرقم الظاهر على وجه حجر النرد الأكثر تكرارًا.

الرقم ٦ يظهر ٢١ مرّة فيكون المنوال هو الرقم ٦

المدى

ما دامت أكبر قيمة وأصغر قيمة معروفتَين، يكون المدى ٦ – ١ = ٥

تنظيم البيانات في مُخطّط الساق والورقة

يمكنك أن تُحدّد قيَم الوسط الحسابي والوسيط والمنوال والمدى من مُخطّط الساق والورقة:

الوسط الحسابي

يُبيِّن مُخطّط الساق والورقة جميع قيَم البيانات، لذلك يُحسَب الوسط الحسابي بإيجاد مجموع كل القيَم وقسمته على عدد القيَم، بالطريقة نفسها التي تجد فيها الوسط الحسابي لأي مجموعة بيانات.

الوسيط

يمكنك استخدام مُخطّط الساق والورقة المُرتَّب لتُحدِّد الوسيط، بحيث تكون أوراق كل ساق في مُخطّط الساق والورقة المُرتَّب، مُرتَّبة من الأصغر إلى الأكبر.

المنوال

يسمح مُخطّط الساق والورقة المُرتَّب لك بمعرفة القيَم المُتكرِّرة في كل صف، بحيث يمكنك مُقارنة عدد تلك القيَم لتجد المنوال.

المدى

يمكنك استخدام أوّل قيمة وآخر قيمة في مُخطّط الساق والورقة المُرتَّب لتجد المدى.

مثـال ٣

يبيّن مُخطّط الساق والورقة التالي عدد الزبائن الذين تمّت خدمتهم في أحد المتاجر كل نصف ساعة، خلال ٨ ساعات:

الساق	الورقة
٠	٢ ٥ ٥ ٦ ٦ ٦ ٦
١	١ ٣ ٣ ٥ ٥ ٦ ٧ ٧
٢	١

المفتاح
٢ | ٠ = ٢ زبون

أ ما مدى عدد الزبائن الذين تمّت خدمتهم؟

ب ما منوال عدد الزبائن الذين تمّت خدمتهم؟

ج أوجد الوسيط لعدد الزبائن الذين تمّت خدمتهم.

د كم زبونًا تمّت خدمتهم خلال هذه الفترة؟

هـ أوجد الوسط الحسابي للزبائن الذين تمّت خدمتهم كل نصف ساعة.

الحـلّ:

أ المدى ٢١ − ٢ = ١٩ زبونًا

أصغر عدد هو ٢
وأكبر عدد هو ٢١

ب ٦

هذه هي القيمة الأكثر تكرارًا.

ج $\frac{(١١ + ١٣)}{٢} = \frac{٢٤}{٢} = ١٢$

هناك ١٦ قيمة من البيانات، لذلك يكون الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتَين الثامنة والتاسعة.

د الصف ١: ٢ + ٥ + ٥ + ٦ + ٦ + ٦ + ٦ = ٣٦
الصف ٢: ١١ + ١٣ + ١٣ + ١٥ + ١٥ + ١٦ + ١٧ + ١٧ = ١١٧
الصف ٣: ٢١
٣٦ + ١١٧ + ٢١ = ١٧٤ إجمالي عدد الزبائن

لتحسب ذلك أوجد مجموع كل القيَم. أوجد المجموع لكل صف، ثم ضمّها معًا لتجد المجموع الكلّي.

هـ الوسط الحسابي = $\frac{١٧٤}{١٦}$ = ١٠,٨٧٥ زبائن تمّت خدمتهم كل نصف ساعة.

الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع قيَم البيانات}}{\text{عدد القيَم}}$

ملخّص:

- **المنوال** هو القيمة الأكثر تكرارًا في مجموعة البيانات، قد يكون لمجموعة البيانات أكثر من منوال، ولكن عندما تتساوى تكرارات كل القيَم فلا يكون هناك منوال في هذه الحالة.
- **الوسط الحسابي** هو إيجاد إجمالي كل القيَم لمجموعة من البيانات وقسمتها على عدد تلك القيَم: $\frac{\text{مجموع قيَم البيانات}}{\text{عدد القيَم}} = \frac{\text{مجموع (التكرارات} \times \text{القيمة)}}{\text{إجمالي التكرارات}}$

  (تذكّر أن توسِّع الجدول لتتمكَّن من زيادة عمود يساعدك على إيجاد التكرار × القيمة في كل حالة).
- **الوسيط** هو القيمة المتوسّطة لمجموعة من القيَم المرتبة ترتيبًا تصاعديًّا أو تنازليًّا، ولإيجاد الوسيط نتَّبع الخطوات الآتية:
  - رتّب قيَم البيانات ترتيبًا تصاعديًّا أو تنازليًّا.
  - إذا كان عدد القيَم في البيانات ن، حيث ن عدد فردي، أوجد $\frac{\text{ن} + ١}{٢}$ لتجد موقع الوسيط.
  - إذا كان عدد القيَم في البيانات ن، حيث ن عدد زوجي، أوجد $\frac{\text{ن}}{٢}$ لتحصل على موقع القيمة الأولى، وستكون القيمة الأخرى هي القيمة التالية لها مباشرة. أوجد الوسط الحسابي لهاتَين القيَمتين.
  - اجمع التكرارات بالترتيب حتى تجد القيمة التي تجعلك تتجاوز (أو تعادل) إحدى قيمتَي المُنتصف، فتكون هذه هي قيمة الوسيط.

تمارين ٥-٢-أ

١) أنشئ جدولاً تكراريًّا للبيانات التالية، وأوجد:

أ الوسط الحسابي ب الوسيط ج المنوال د المدى

٣	٤	٥	١	٢	٨	٩	٦	٥	٣	٣	١	٦	٤	٧	٨	١
١	٥	٥	٢	٣	٤	٥	٧	٨	٣	٤	٢	٥	١	٩	٤	٥
٦	٧	٨	٩	٢	١	٥	٤	٣	٤	٥	٦	١	٤	٤	٨	

٢) تمّ في أحد المهرجانات بيع تذاكر الفعاليات على النحو التالي: ١٨٠ تذكرة بسعر ٦,٥٠ ريالات عُمانية للتذكرة الواحدة، و٢١٥ تذكرة بسعر ٨ ريالات عُمانية للتذكرة الواحدة، و١٢٤ تذكرة بسعر ١٠ ريالات عُمانية للتذكرة الواحدة.

أ مثّل هذه البيانات في جدول تكراري.

ب احسب الوسط الحسابي لسعر التذاكر التي تم بيعها، مُقرِّبًا الإجابة إلى أقرب عدد مُكوَّن من ٣ أرقام معنوية.

٣) تعدّ رقية الرسائل البريدية الإلكترونية التي تصلها يوميًّا لمُدَّة ٦٠ يومًا، وتسجّل عددها في الجدول التالي:

عدد الرسائل في كل يوم	٠	١	٢	٣	٤	٥
التكرار	٢٨	٢١	٦	٣	١	١

أوجد:

أ المنوال لعدد الرسائل.

ب الوسيط لعدد الرسائل.

ج الوسط الحسابي لعدد الرسائل.

د المدى لعدد الرسائل.

٤) البيانات المُسجّلة في الجدول التالي توضّح الدراسة المسحية لعدد الأطفال في ١٠٠ أُسرة:

عدد الأطفال في الأسرة الواحدة	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
عدد الأُسر	٤	٣٦	٢٧	٢١	٥	٤	٢	١

أوجد:

أ المنوال لعدد الأطفال.

ب الوسيط لعدد الأطفال.

ج الوسط الحسابي لعدد الأطفال.

٥) يُبيّن الجدول التالي الدرجات التي حصل عليها مجموعة من طلاب الصف العاشر في أحد اختبارات مادة الفيزياء (الدرجة الكلية للاختبار ١٠ درجات):

الدرجة	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
عدد الطلبة	١	٠	٣	٢	٢	٤	٣	٤	٦	٣	٢

أوجد:

أ المنوال لدرجات الطلاب

ب الوسيط لدرجات الطلاب

ج الوسط الحسابي لدرجات الطلاب

د ما أفضل مقياس إحصائي يمكن أن يستخدمه المعلّم بحيث يعبِّر من خلاله عن أداء الطلبة؟ ولماذا؟

٦) قاس محمود كُتل ٢٠ لاعب كرة قدم مُقرَّبة إلى أقرب كيلوغرام، وأنشأ مُخطّط الساق والورقة التالي:

الورقة	الساق
٦	٤
٤ ٠ ٠	٥
٧ ٨ ٩ ٥	٥
٣ ٠ ١ ١ ٣ ٢	٦
٦ ٨ ٦ ٩	٦
٠ ٤	٧

المفتاح
٦ | ٤ = ٤٦ كيلوغرامًا

أ) أعد رسم مُخطّط الساق والورقة لتُشكِّل مجموعة بيانات مُرتَّبة.

ب) كم لاعبًا كتلته ٦٠ كغم أو أكثر؟

ج) لماذا لا يُعدّ المنوال مقياسًا إحصائيًّا مفيدًا لهذه البيانات؟

د) ما المدى لكتل اللاعبين؟

هـ) ما الوسيط لكتل اللاعبين؟

٧) سجَّلت ندى عدد القطع الإلكترونية التي تنتجها إحدى الآلات في كل ساعة ولمدة ٢٤ ساعة على النحو التالي:

١٤٣ ١٢٨ ١٢١ ١٢٦ ١٣٤ ١٥٠ ١٢٨ ١٣٢ ١٤٠ ١٣١ ١٤٦ ١٢٨

١٣٣ ١٣٨ ١٤٠ ١٢٥ ١٤٢ ١٢٩ ١٣٦ ١٣٠ ١٣٣ ١٤٢ ١٢٦ ١٢٩

أ) أنشئ مُخطّط الساق والورقة لعرض البيانات.

ب) حدِّد المدى للبيانات.

ج) أوجد الوسيط للبيانات.

٥-٢-ب حساب المقاييس الإحصائية والمدى لبيانات مُتَّصلة مُجمَّعة في فئات

تكون بعض البيانات **مُنفصلة** وتتَّخذ قيَمًا مُحدّدة فقط؛ فإذا رميت حجر نرد مثلاً، فإنك تحصل فقط على أحد الأعداد التالية ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، وإذا حسبت عدد السيّارات الحمراء في مواقف للسيارات، فإن النتيجة ستكون عددًا كاملاً فقط.

وفي المقابل قد تكون بعض البيانات **مُتّصلة** ويمكن أن تتَّخذ أي قيمة في مجال مُحدّد، كأطوال الأشخاص، أو درجة حرارة السوائل.

فإذا قِست مثلاً أطوال ١٠٠ طفل، فقد تخلُص إلى ١٠٠ نتيجة مختلفة، ويمكنك في هذه الحالة تجميع البيانات وتلخيصها في جدول تكراري لتصبح العملية قابلة للتحكُّم، وهذا ما يُسمّى **بالبيانات المُجمّعة**، كما يمكن كتابة المجموعات (أو الفئات) باستخدام رموز المُتباينات، فإذا رغبت مثلاً في إنشاء فئة لأطوال (ل سم) بين ١٢٠ سم و١٣٠ سم، فيمكنك أن تكتبها على النحو التالي:

$$١٢٠ \leqslant ل < ١٣٠$$

هذا يعني أن ل أكبر من أو تساوي ١٢٠، لكنّها أقلّ من ١٣٠.

وقد تكون الفئة الثانية:

$$١٣٠ \leqslant ل < ١٤٠$$

لاحظ أن ١٣٠ ليست من الفئة الأولى، بل من الفئة الثانية، وهذا يجنِّبك أي إرباك أو حيرة في تحديد مكان وضع القيَم الحدودية.

يُبيّن المثال التالي كيفية استخدام الجدول التكراري ذي الفئات لإيجاد **الوسط الحسابي التقديري** والمدى، وكذلك لإيجاد **الفئة المنوالية** والفئة الوسيطية (أي الفئات التي يقع فيها المنوال والوسيط).

مُساعَدة

قد يُطلَب إليك أن تُبرِّر إعطاءك الحسابات كتقديرات للإجابة. تذكَّر أن البيانات المتوفِّرة لديك ليست دقيقة، وما هي إلاّ تكرارات وفئات.

مثـال ٤

يُبيّن الجدول التالي أطوال ١٠٠ طفل (بالسنتيمتر):

الطول (ل (سم))	التكرار (ت)
$١٢٠ \leqslant ل < ١٣٠$	١٢
$١٣٠ \leqslant ل < ١٤٠$	١٦
$١٤٠ \leqslant ل < ١٥٠$	٣٨
$١٥٠ \leqslant ل < ١٦٠$	٢٤
$١٦٠ \leqslant ل \leqslant ١٧٠$	١٠

قدّر الوسط الحسابي لأطوال الأطفال، وأوجد الفئة المنوالية والفئة الوسيطية، وقدّر المدى.

الحــلّ:

الوسط الحسابي:

وسّع جدولك ليشمل مراكز الفئات ومجموع كل فئة.

الطول (ل (سم))	التكرار (ت)	مراكز الفئات	التكرار × مراكز الفئات
١٢٠ ≤ ل < ١٣٠	١٢	١٢٥	١٢ × ١٢٥ = ١٥٠٠
١٣٠ ≤ ل < ١٤٠	١٦	١٣٥	١٦ × ١٣٥ = ٢١٦٠
١٤٠ ≤ ل < ١٥٠	٣٨	١٤٥	٣٨ × ١٤٥ = ٥٥١٠
١٥٠ ≤ ل < ١٦٠	٢٤	١٥٥	٢٤ × ١٥٥ = ٣٧٢٠
١٦٠ ≤ ل ≤ ١٧٠	١٠	١٦٥	١٠ × ١٦٥ = ١٦٥٠
المجموع	١٠٠		١٤٥٤٠

الوسط الحسابي التقديري لأطوال الأطفال هو:

$$\frac{١٥٠٠ + ٢١٦٠ + ٥٥١٠ + ٣٧٢٠ + ١٦٥٠}{١٢ + ١٦ + ٣٨ + ٢٤ + ١٠}$$

$$= \frac{١٤٥٤٠}{١٠٠} = ١٤٥,٤ \text{ سم}$$

الفئة الوسيطية:

الطول (ل (سم))	التكرار (ت)	
١٢٠ ≤ ل < ١٣٠	١٢	٢٨
١٣٠ ≤ ل < ١٤٠	١٦	
١٤٠ ≤ ل < ١٥٠	٣٨	٦٦
١٥٠ ≤ ل < ١٦٠	٢٤	
١٦٠ ≤ ل ≤ ١٧٠	١٠	

الفئة الوسيطية هي ١٤٠ ≤ ل < ١٥٠

الفئة المنوالية:

الفئة المنوالية هي ١٤٠ ≤ ل < ١٥٠

المدى:

أفضل تقدير للمدى هو ١٧٠ – ١٢٠ = ٥٠ سم

لم يُعرف الطول الحقيقي لأي طفل، لذا استُخدمت مراكز الفئات كأفضل تقدير لطول كل طفل في الفئة المُحدّدة. فمثلاً، تقع أطوال الـ ١٢ طفلاً في فئة ١٢٠ ≤ ل < ١٣٠ وهي تتراوح بين ١٢٠سم و١٣٠ سم، وهذا كل ما نعرفه. تقع نقطة المُنتصَف بين ١٢٠ سم و١٣٠ سم، وهي $\frac{(١٣٠ + ١٢٠)}{٢}$ = ١٢٥ سم.

ويكون أفضل تقدير لأطوال الـ ١٢ طفلًا هو ١٢ × ١٢٥ (التكرار × مركز الفئة).

لتجد الفئة الوسيطية، عليك تحديد موقع الطالبَين الخمسين والحادي والخمسين. لاحظ أن مجموع تكرار أول فئتَين هو ٢٨، مما يعني أن طول الطالب الثامن والعشرين في مجموعة البيانات المُرتَّبة سيكون الأطول في فئة ١٣٠ ≤ ل < ١٤٠ ومجموع تكرارات الفئات الثلاث الأولى يساوي ٦٦، ممّا يعني أن طول الطالب الخمسين يقع في فئة ١٤٠ ≤ ل < ١٥٠

تكون الفئة الأكثر تكرارًا هي الفئة المنوالية.

قد يكون طول أقصر طفل ١٢٠ سم وطول أطول طفل ١٧٠ سم.

تمارين ٥-٢-ب

١) يبيّن الجدول التالي أطوال ٥٠ لوحة في معرض فني. أوجد الوسط الحسابي التقديري لأطوال اللوحات:

الطول (ل سم)	التكرار (ت)
١٣٠ < ل ≤ ١٣٥	٧
١٣٥ < ل ≤ ١٤٠	١٣
١٤٠ < ل ≤ ١٤٥	١٥
١٤٥ < ل ≤ ١٥٠	١١
١٥٠ < ل ≤ ١٥٥	٤
المجموع	Σت = ٥٠

الرمز Σ هو الحرف الإغريقي 'سيغما'، وهو يُستخدم ليُمثّل المجموع. لذلك فإن Σت يعني مجموع كل التكرارات.

٢) يبيّن الجدول التالي الفترات الزمنية لـ ١٠٠ مُكالمة هاتفية:

الفترة الزمنية (ن (دقيقة))	التكرار (ت)
٠ < ن ≤ ١	١٢
١ < ن ≤ ٢	١٤
٢ < ن ≤ ٤	٢٠
٤ < ن ≤ ٦	١٤
٦ < ن ≤ ٨	١٢
٨ < ن ≤ ١٠	١٨
١٠ < ن ≤ ١٥	١٠

أوجد الوسط الحسابي التقديري للفترات الزمنية التي استغرقتها المُكالمات الهاتفية. (اكتب الناتج بالدقائق والثواني، مُقرِّبًا إلى أقرب ثانية).

٣) يُبيّن الجدول التالي درجات الحرارة لأنابيب اختبار خلال تجربة كيميائية:

درجة الحرارة (ح (°س))	التكرار (ت)
٤٥ ≤ ح < ٥٠	٣
٥٠ ≤ ح < ٥٥	٨
٥٥ ≤ ح < ٦٠	١٧
٦٠ ≤ ح < ٦٥	٦
٦٥ ≤ ح < ٧٠	٢
٧٠ ≤ ح < ٧٥	١

احسب الوسط الحسابي التقديري لدرجات الحرارة لأنابيب الاختبار.

٤) يتنافس فريقا الصقور والنسور في سباق للجري، ويُبيّن الجدولان التاليان كتل اللاعبين في كل فريق:

فريق الصقور

الكتلة (ك (كغم))	التكرار (ت)
٥٥ ≤ ك < ٦٥	٢
٦٥ ≤ ك < ٧٥	٨
٧٥ ≤ ك < ٨٥	١٢
٨٥ ≤ ك ≤ ١٠٠	٣

فريق النسور

الكتلة (ك (كغم))	التكرار (ت)
٥٥ ≤ ك < ٦٥	١
٦٥ ≤ ك < ٧٥	٧
٧٥ ≤ ك < ٨٥	١٣
٨٥ ≤ ك ≤ ١٠٠	٤

أ) احسب الوسط الحسابي التقديري لكتل اللاعبين في كل فريق.

ب) احسب المدى لكتل اللاعبين في كل فريق.

ج) فسّر إجابتَي الجُزئيَّتَين (أ) و (ب).

٥) يبيّن الجدول التالي أطوال ٥٠ سلكًا تُستخدم في مختبر الفيزياء مُقرَّبة إلى أقرب سنتيمتر:

الطول (ل)	٢٦–٣٠	٣١–٣٥	٣٦–٤٠	٤١–٤٥	٤٦–٥٠
التكرار (ت)	٤	١٠	١٢	١٨	٦

أوجد الوسط الحسابي التقديري لأطوال الأسلاك.

٦) يبيّن الجدول التالي أعمار المُعلّمين في مدرسة ثانوية مُقرَّبة إلى أقرب سنة:

العمر (سنة)	٢٣–٣٠	٣١–٣٥	٣٦–٤٠	٤١–٤٥	٤٦–٥٠	٥١–٦٥
التكرار (ت)	٣	٦	١٢	١٥	٦	٧

احسب الوسط الحسابي التقديري لأعمار المُعلّمين.

انتبه وأنت تحسب مراكز الفئات. إذا كان عمر أحدهم أصغر بيوم من ٣١ سيبقى ضمن فئة ٢٣ – ٣٠. ما الفرق الناتج من ذلك؟