١-٧ بيانات بمُتغيّرَين

سابقًا

تعلّمت كيف تلخّص البيانات وتقوم بالاستنتاجات حولها في الوحدتَين ٢ و٥

عرفت حتى الآن كيف تلخّص البيانات وتُجري الاستنتاجات اعتمادًا على العمليات الحسابية، وكنت في جميع الحالات تجمع البيانات بمقاييس أو عبر مشاهدات منفردة. والآن فكّر في المسألة التالية:

يقوم مدير محل المثلّجات بمتابعة التغيُّر في المبيعات اليومية لمنتجاته خلال السنة، وذلك عند ارتفاع درجة الحرارة وانخفاضها. فقرّر اختيار ١٠ أيام بطريقة عشوائية وسجّل درجة الحرارة ومجموع قيمة المبيعات التي يحقّقها في جدول كالتالي:

اليوم	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي
درجة الحرارة (°س)	٤	١٨	١٢	٣٢	٢١	-٣	٠	١٠	٢٢	٣١
مجموع قيمة المبيعات (ريال عُماني)	١٢٣	٥٥٦	٢١٢	٦٥٧	٤٠١	٢٣	٤٥	١٧١	٤٦٧	٦٥٩

تمّ أخذ قياسَين كلّ يوم كما تُلاحظ، وتم تسجيلهما في صورة زوج مُرتّب، يُعرف هذا النوع من البيانات باسم **البيانات بمُتغيّرَين**، وسترى هذه البيانات بوضوح أكثر عندما تمثّل القيَم في **مخطّط الانتشار**.

رابط

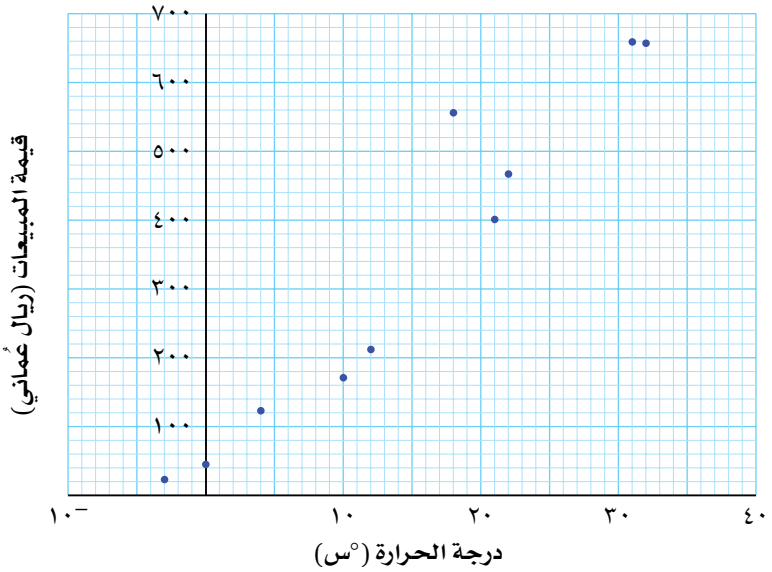
يُستخدم الارتباط لتحديد العلاقات بين المُتغيّرات في علوم الحياة، كالتطرُّق إلى العلاقة بين طول عظمة مُعيّنة عند شخص ما، وطوله.

رسم مخطّط الانتشار

لترسم مخطّط الانتشار، عليك أوّلاً تحديد **المُتغيّر التابع**، أي المُتغيّر الذي يعتمد على المُتغيّر الآخر، ويبدو منطقيًّا في المثال أعلاه، أن يعتمد مجموع قيمة المبيعات على درجة الحرارة، لأن الناس يميلون إلى شراء المثلّجات أكثر عندما ترتفع درجة الحرارة.

يتضمّن مخطّط الانتشار محورَي إحداثيات كما هو مبيّن أدناه، حيث يتم تمثيل المُتغيّر التابع في المحور الرأسي، وإذا تمّت معاملة بيانات الجدول في صورة إحداثيات، فإن المُخطّط يتم تمثيله كما يلي:

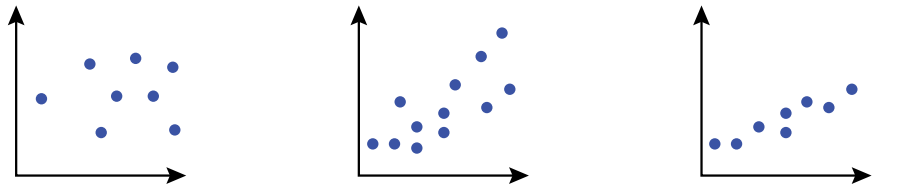
مُخطّط انتشار يعرض العلاقة بين قيمة مبيعات المُثلّجات و درجة الحرارة



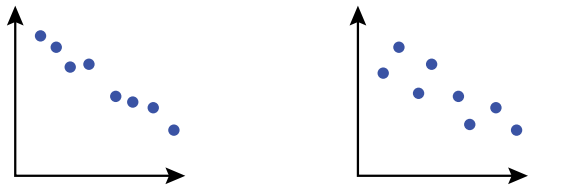
لاحظ وجود علاقة تربط بين قيمة مبيعات المثلّجات ودرجة الحرارة، ففي الواقع، تزداد المبيعات مع ارتفاع درجة الحرارة، ويُسمى هذا الارتباط **بالارتباط الموجب**، كما يُظهر المُخطّط أن **اتّجاه** النقاط يتحرّك من الأسفل يسار الشكل إلى الأعلى يمينًا، أما إذا كانت النقاط تتحرّك من الأعلى يسارًا إلى الأسفل يمينًا فسوف تستنتج أن قيمة المبيعات تتناقص مع ارتفاع درجات الحرارة، وفي هذه الحالة يكون الارتباط **ارتباطًا سالبًا**.

إذا لم تجد نمطًا واضحًا، فهذا يعني أنه لا يوجد ارتباط بين المُتغيّرَين، وفي المقابل كلّما كان النمط واضحًا كان الارتباط قويًّا.

أمثلة على 'قوة' الارتباط بين المُتغيّرَين:



ارتباط موجب قوي　　ارتباط موجب ضعيف　　لا يوجد ارتباط

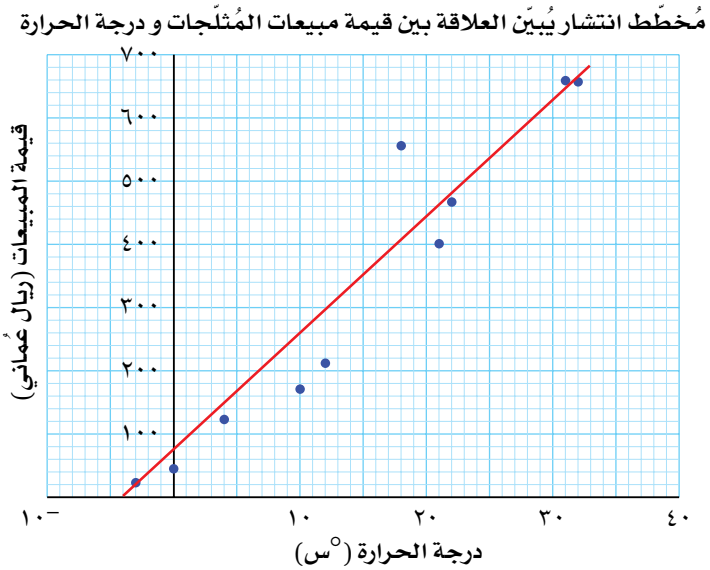


ارتباط سالب ضعيف　　ارتباط سالب قوي

من المهم جدًّا أن تحدّد ما إذا كان الارتباط بين المُتغيّرَين موجبًا أو سالبًا، قويًّا أو ضعيفًا.

لاحظ على مخطّط قيَم مبيعات المُثلّجات في الصفحة السابقة، أن إحدى النقاط تقع بعيدًا عن النمط الشائع، وهي (١٨، ٥٥٦)، ولم يكن متوقّعًا تسجيل قيمة مرتفعة للمبيعات في ذلك اليوم. فقد تكون هناك مناسبة خاصّة في ذلك اليوم أو مجرّد خطأ في تسجيل البيانات، لذا يجب أن تدرس وتستقصي أي نقطة مُشابهة لهذا الموضوع.

يمكنك أن تعرض الاتّجاه العام للمُتغيّرَين من خلال رسم **المستقيم الأفضل تمثيلاً**. لاحظ في المخطّط التالي، أنه تم رسم مستقيم يمرّ بنقاط قريبة قدر الإمكان من أكثر النقاط المعروضة في البيانات.



هذا هو المستقيم الأفضل تمثيلاً، ويمكن استخدامه لإجراء التوقُّعات بالاعتماد على البيانات المُجمّعة.

فإذا أردتَ مثلًا أن تتوقّع قيمة مبيعات المثلجات عندما تكون درجة الحرارة ٢٧° س، فعليك تنفيذ الخطوات التالية:

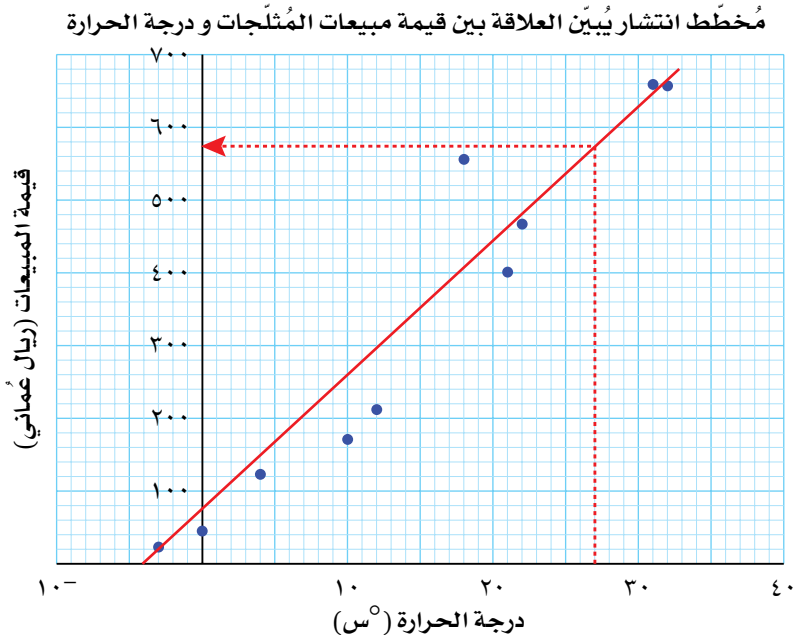
١ عيّن نقطة درجة الحرارة ٢٧° س على محور درجات الحرارة.

٢ ارسم مستقيمًا رأسيًّا من النقطة ليتقاطع مع المستقيم الأفضل تمثيلاً.

٣ ارسم من نقطة التقاطُع الواقعة على المستقيم الأفضل تمثيلاً مستقيمًا أفقيًّا ليتقاطع مع محور قيمة المبيعات.

٤ اقرأ قيمة المبيعات من التمثيل البياني.

يظهر المخطّط الآن كما هو مبيّن أدناه:



القيمة التقديرية لقيمة المبيعات هنا هي ٥٧٥ ريالاً عُمانيًّا تقريبًا

مثـال ١

يعتقد صانع الأحذية الجلدية أن أطوال الأشخاص بالسنتيمتر تُعطي فكرة معقولة عن أطوال أقدامهم. ليستقصي هذا الاعتقاد، جمع صانع الأحذية أطوال ١٠ أشخاص وأطوال أقدامهم، وسجّل النتائج المُبيّنة في الجدول التالي:

الشخص	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي
طول الشخص (سم)	١٥٦,٢	١٨٢,٤	١٦٥,٣	١٥٥,١	١٦٥,٢	١٢٢,٩	١٧٦,٣	١٨٣,٤	١٦٣,٠	١٤٣,١
طول القدم (سم)	٢٨,٢	٣١,١	٢٢,٥	٢٨,٦	٢٥,٤	١٣,٢	٢٩,٩	٣٣,٤	٢٢,٥	١٩,٤

أ ارسم مخطّط انتشار، حيث يمثّل المحور الأفقي أطوال الأشخاص، ويمثّل المحور الرأسي أطوال الأقدام.

ب حدّد نوع الارتباط الذي يُظهره المخطّط.

ج ارسم المستقيم الأفضل تمثيلاً.

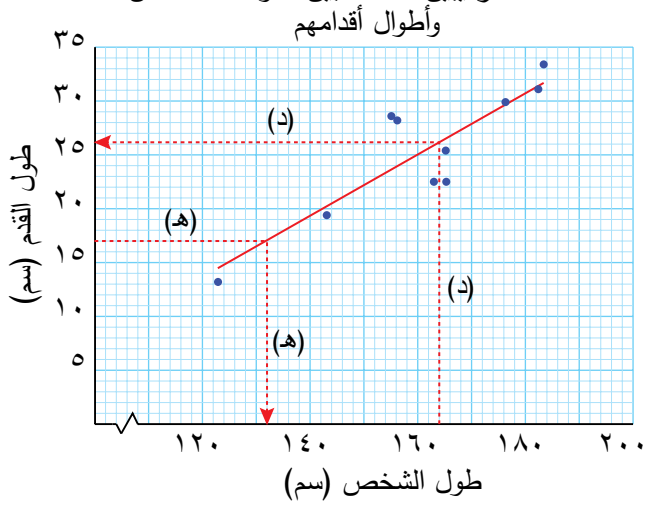
د قدّر طول قدم شخص إذا كان طوله ١٦٤ سم.

هـ قدّر طول شخص إذا كان طول قدمه ١٧ سم.

و فسّر دقة تقديرك في الجزئيّتَين (د)، (هـ).

الحـلّ:

أ



ارسم المستقيم الأفضل تمثيلًا، تأكّد من أنه يشير إلى الاتّجاه الصحيح ويمر بين جميع النقاط. استخدم المخطّط للإجابة عن كل الأسئلة.

ب الارتباط بين المُتغيّرَين موجب وقوي، لأن طول القدم يزداد مع ازدياد طول الشخص.

عندما توضّح نوع الارتباط، عد إلى استخدام السياق الأصلي المذكور في السؤال.

ج	تم رسم المستقيم الأفضل تمثيلاً على المخطّط.	
د	تم رسم المستقيمات المناسبة على المخطّط. طول الشخص ١٦٤ سم يتوافق مع طول القدم ٢٦ سم تقريبًا.	
هـ	طول القدم ١٧ سم يتوافق مع طول الشخص ١٣٢ سم تقريبًا.	
و	معظم النقاط قريبة من المستقيم الأفضل تمثيلاً، لذلك فإن الارتباط قوي، الأمر الذي يعني أن المستقيم الأفضل تمثيلاً يعطي مستوى مقبولًا من الدقّة عند إجراء التقديرات.	

القاعدة الذهبية

قبل أن تبدأ برسم مخطّط الانتشار، يجب أن تراعي القاعدة التالية:

- لا يمكن استخدام المخطّط لإجراء توقُّعات من خارج مدى البيانات.

نجد مثلاً في المخطّط الذي يمثّل طول الشخص مع طول القدم أعلاه، أنّ البيانات لا تتضمّن أي طول لشخص يزيد على ١٨٣,٤ سم، فقد لا يستمرّ اتّجاه البيانات على النمط نفسه، وقد يتغيّر المخطّط في الأطوال الكبيرة، لذا لا تُجرى التوقّعات لطول قدم شخص يبلغ طوله ١٩٥ سم مثلاً، قبل أن يُجمع المزيد من البيانات.

تسمّى عملية توسيع المستقيم الأفضل تمثيلاً خارج مدى البيانات **بالاستقراء**.

التوقُّع عندما يكون الارتباط ضعيفًا

إذا طُلب إليك التعليق على توقُّع أجريته، تذكّر دائمًا قوة الارتباط بين المُتغيّرَين كما هي مُبيّنة في المخطّط، إذا كان الارتباط ضعيفًا، فمن المفيد القول بأن التوقُّع لا يتّصف بالثبات، ويشكّل ذلك أحد القيود على التوقُّعات التي يمكن إجراؤها حول البيانات.

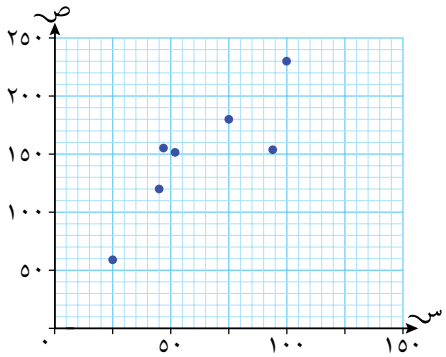
وضع الإجابات في سياقاتها

قد يكون من المفيد إسناد التوقُّعات التي تجريها إلى أصل المسألة، فبدلًا من أن تقول: 'إنّ هذا ارتباط موجب قوي' فقط، قل: 'يمكن إجراء توقُّع معقول لطول شخص عندما نعرف طول قدمه'، أو 'يمكن تقدير قيمة مبيعات المُثلّجات من مجموعة البيانات المُعطاة'.

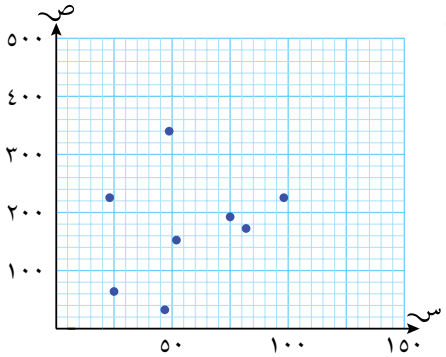
تمارين ٧-١

١) حدّد نوع وقوة الارتباط الموضّح في كل مخطّط من مخطّطات الانتشار التالية:

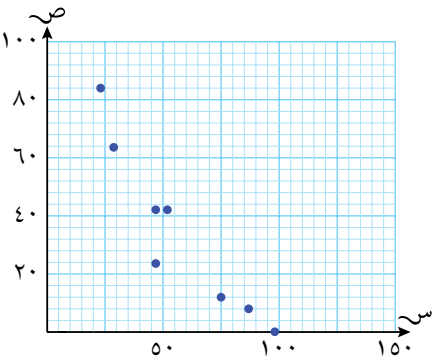
أ



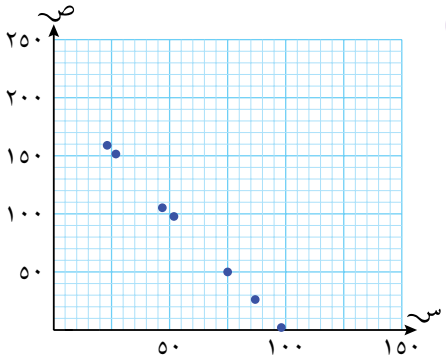
ب



ج



د



٢) يُبيّن الجدول التالي العرض والطول لأوراق شجرة، قيست بالسنتيمتر:

العرض (سم)	١٤	٢٥	٦٧	٥٦	٢٦	٧٨	٣٣	٣٥	١٤	٣٦	١٣	٣٦	٢٥	٦٢	٢٥
الطول (سم)	٢٢	٦٣	١٧٠	١٤١	٧٦	٢٠١	٩٣	٩١	٢٤	٩١	٢٣	٦٧	٥١	١٥١	٧٩

أ ارسم مخطّط الانتشار لبيانات الجدول، بحيث يمثّل المحور الرأسي أطوال الأوراق.

ب فسّر قوة الارتباط بين عرض الأوراق وطولها.

ج ارسم المستقيم الأفضل تمثيلاً لهذه البيانات.

د قدّر طول ورقة عرضها ٢٠ سم.

٣) تُجري أميرة دراسة مسحية لكُتل بعض الرياضيّين، وطول فترة تدريبهم الصباحيّ بالدقائق. سجّلت النتائج في الجدول التالي:

زمن التدريب الصباحيّ (دقيقة)	٢٣	٤٥	١٢	٥	١٨	٦٧	٦٤	١٥	٢٨	٣٩
الكتلة (كغم)	٨٢	٦٥	٧٢	٩٢	٧٣	٨٤	٦٦	٩٨	٨١	٧٢

أ ارسم مخطّط الانتشار الذي يبيّن كتلة كل رياضي مع طول فترة تدريبه الصباحيّ بالدقائق بحيث يمثّل المحور الرأسي الكتلة.

ب ما قوة الارتباط بين كتلة الرياضي وطول فترة تدريبه الصباحيّ؟

ج ماذا تستنتج؟

٤) يستقصي مُبارك العلاقة بين عدد مساعدي المبيعات في المراكز التجارية والفترة الزمنية لانتظار الزبون (بالثواني) حتى يأتي دور خدمته. يُبيّن الجدول التالي النتائج التي حصل عليها مبارك:

عدد مساعدي المبيعات	١٢	١٤	٢٣	٢٨	١٤	١١	١٧	٢١	٣٣	٢١	٢٢	١٣	٧
الفترة الزمنية للانتظار (ثانية)	١٨٣	١٧٩	١٥٤	١٥٠	٢٢٤	٢٣٦	٢٢١	١٩٨	٢٨	٨٧	٧٧	٢٤٤	٢٦٦

أ ارسم مخطّط الانتشار الذي يُبيّن الفترة الزمنية لانتظار الزبون وعدد مساعدي المبيعات في المركز التجاري.

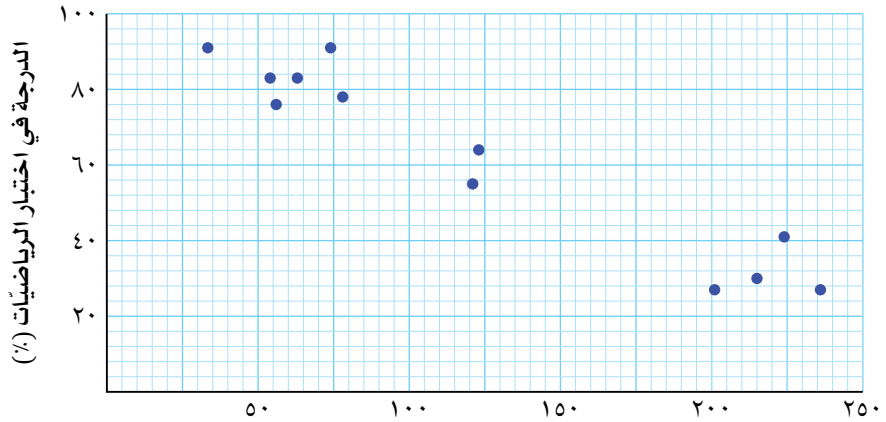
ب صِف الارتباط بين عدد مساعدي المبيعات مع الفترة الزمنية للانتظار.

ج ارسم المستقيم الأفضل تمثيلاً لهذه البيانات.

د زار مُبارك مركزًا تجاريًّا كبيرًا، يبلغ عدد مساعدي المبيعات فيه ٤٥ مُساعِدًا. وسّع مخطّط الانتشار واستخدمه لتستقرئ زمن الانتظار في هذا المركز التجاري.

٥) تستقصي سعاد العلاقة بين زمن مشاهدة الطلاب للبرامج التلفزيونية خلال أسبوع والدرجات التي حصلوا عليها في اختبار الرياضيات بعد أسبوع من ذلك. يعرض مخطّط الانتشار التالي نتائج ١٢ طالبًا:

مُخطّط انتشار يُبيّن العلاقة بين زمن مشاهدة الطلاب للبرامج التلفزيونية و درجاتهم في اختبار الرياضيّات



يبيّن الجدول التالي بعضًا من النتائج التي حصلت عليها سعاد:

زمن مشاهدة البرامج التلفزيونية		٣٤	٢١٥	٥٤		٧٨	٢٢٤	٢٣٦	١٢١	٧٤	٦٣	
الدرجة في اختبار الرياضيات (٪)	٦٤		٣٠	٨٣	٧٦	٧٨	٤١		٥٥	٩١	٨٣	٢٧

أ) انسخ الجدول، واستخدم مخطّط الانتشار لتملأ الجدول بالقيَم المجهولة.

ب) صِفْ الارتباط بين زمن مشاهدة البرامج التلفزيونية والدرجات في اختبار الرياضيات.

ج) انسخ المخطّط وارسم المستقيم الأفضل تمثيلاً.

د) حصلت أحلام على درجة ٦٧٪ في اختبار الرياضيات. قدّر زمن مشاهدتها للبرامج التلفزيونية.

هـ) صِفْ مدى دقة تقديرك في الجزئية (د).