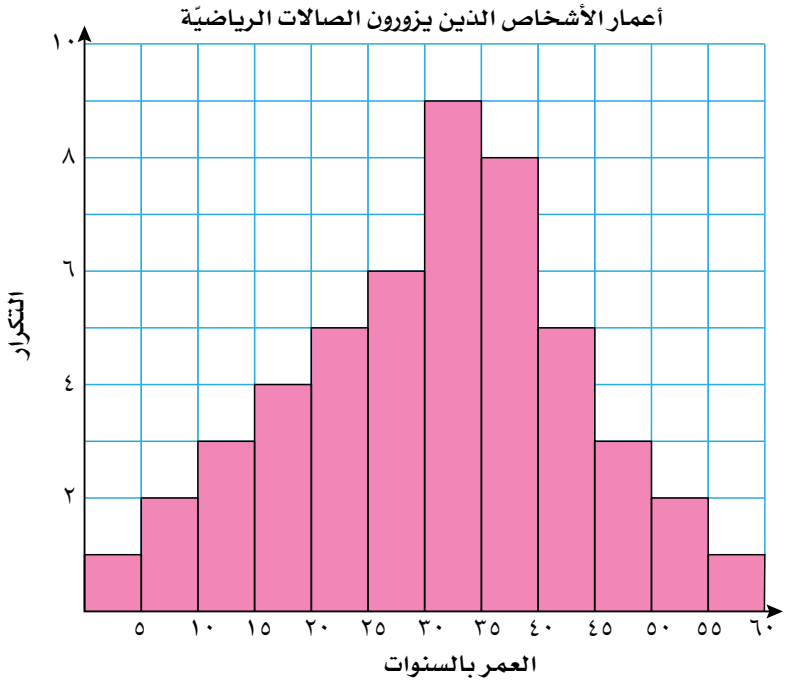
٢-٧ المُدرّج التكراري

٧-٢-أ المُدرّج التكراري ذو الفئات المتساوية

المُدرّج التكراري هو تمثيل بياني خاص يشبه الأعمدة البيانية، لكنه يُستخدم ليبيّن توزيعًا متّصلاً أو بيانات مُجمّعة.

انظر إلى المُدرّج التكراري التالي الذي يبيّن أعمار الأشخاص الذين يزورون الصالات الرياضية:



لاحظ أن:

- مقياس المحور الأفقي **متّصل** وأن كل عمود مرسوم فوق **مدى الفئة** المحدّدة.
- يبيّن ارتفاع الأعمدة تكرار البيانات.
- لا يوجد فراغات بين الأعمدة في التمثيل، لأن المقياس الأفقي متّصل (إذا كان **تكرار** فئة ما هو الصفر، فلا يتم رسم عمود أعلى الفئة، وبناء على ذلك ستحدث فجوة بين الأعمدة في هذه الحالة).

عندما تكون أطوال الفئات متساوية، يكون العرض في كل الأعمدة مُتساويًا. رغم أن مساحة العمود هي التي تدلك على تكرار الفئة، إلا أنه من المتعارف عليه استخدام المقياس الرأسي لهذا الغرض عندما تكون الفئات متساوية (لذا تتم تسمية المحور الرأسي 'التكرار' كما مبيّن في المخطط أعلاه).

سابقًا

تم عرض البيانات المتّصلة في الوحدة ٢

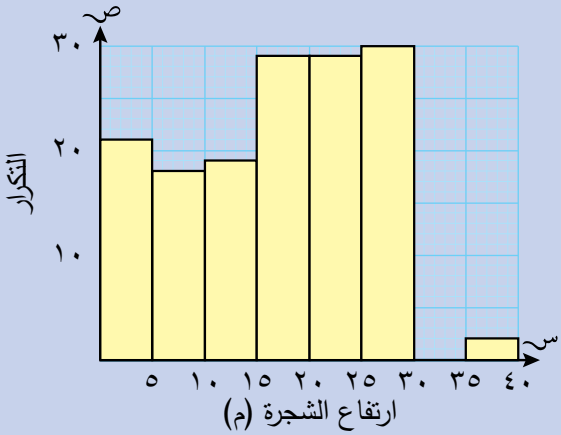
سابقًا

تم عرض تجميع البيانات في فئات في الوحدتَين ٢، ٥

مثـــال ٢

يبيّن كلّ من الجدول والمُدرّج التكراري التاليَين ارتفاعات عيّنة من الأشجار في إحدى الغابات:

ارتفاع الشجرة (ع (متر))	التكرار
٠ ≤ ع < ٥	٢١
٥ ≤ ع < ١٠	١٨
١٠ ≤ ع < ١٥	١٩
١٥ ≤ ع < ٢٠	٢٩
٢٠ ≤ ع < ٢٥	٢٩
٢٥ ≤ ع < ٣٠	٣٠
٣٠ ≤ ع < ٣٥	٠
٣٥ ≤ ع < ٤٠	٢



أ كم شجرة ارتفاعها أقلّ عن ٥ م؟

ب ما الفئة التي يكون ارتفاع الأشجار فيها هو الأكثر تكرارًا في العيّنة؟

ج كم شجرة يبلغ ارتفاعها ٢٠ م أو أكثر؟

د لماذا تتضمّن الفئات رموز المتباينات؟

هـ لماذا حدثت فجوة بين الأعمدة في الجهة اليمنى من التمثيل البياني؟

الحـــلّ:

أ	٢١	اقرأ التكرار على المحور الرأسي في المُدرّج التكراري للعمود ٠ ≤ ع < ٥
ب	٢٥ ≤ ع < ٣٠ م	أوجد أطول عمود، واقرأ الفئة المُمثّلة له على المحور الأفقي.
ج	٦١	أوجد تكرار كل فئة ارتفاع أعمدتها ٢٠ م أو أكثر، واجمعها معًا.
د	بما أنّ مقياس المحور الأفقي للمُدرّج التكراري متّصل، فإن الفئات متّصلة أيضًا. تمنع رموز المتباينات أن يقع ارتفاع شجرة ما في أكثر من فئة واحدة. يعني ذلك أنّنا إذا لم نستخدم رموز المتباينات، فإن شجرة ارتفاعها ٥ م قد تقع في فئتين، وبناء على ذلك يتمّ عدّها مرّتَين.	
هـ	يبلغ التكرار المقابل للفئة ٣٠ ≤ ع < ٣٥ الصفر (٠)، لذا لا يتم رسم عمود عند هذه الفئة.	

مثـــال ٣

تُجري جميلة تجربة في صفّها لإيجاد كتلة الزبيب (بالغرام) والتي يمكن أن يمسكها الطلبة بقبضتهم. سجّلت جميلة النتائج التقريبيّة التي حصلت عليها مقرَّبة إلى أقرب غرام فكانت كالآتي:

١٨	١٨	٢٠	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٣
٢٣	٢٤	٢٤	٢٥	٢٥	٢٥	٢٥	٢٥
٢٥	٢٦	٢٦	٢٧	٣٠	٣٠	٣١	٣٥

أ) استخدم الفئات ١٦–٢٠، ٢١–٢٥، ٢٦–٣٠، ٣١–٣٥ لترسم جدولًا تكراريًّا ذا فئات.

ب) ما الفئة المنوالية لهذه البيانات؟

ج) ارسم مُدرّجًا تكراريًّا لعرض النتائج.

سابقًا

تعلّمت في الوحدة ٢ كيف ترسم **جدولاً تكراريًّا ذا فئات**.

الحـــلّ:

أ)

كتلة الزبيب (ك (غم))	التكرار
١٦–٢٠	٣
٢١–٢٥	١٤
٢٦–٣٠	٥
٣١–٣٥	٢

احسب العدد في كل فئة لتملأ الجدول.

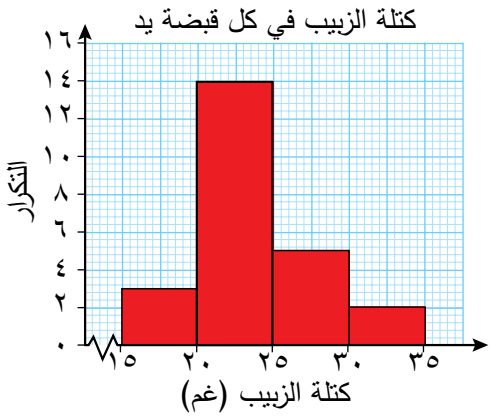
ب) الفئة المنوالية هي ٢١–٢٥

لا نستطيع إيجاد منوال البيانات المُجمّعة، لأننا لا نعرف القيَم المُنفردة في كل فئة. لذلك نوجِد الفئة الأكثر تكرارًا. تُسمّى هذه الفئة بـ '**الفئة المنوالية**'

سابقًا

تعلّمت سابقًا في الوحدة ٥ أن المنوال هو القيمة الأكثر تكرارا.

ج)



رغم أن البيانات مُنفصلة، فإنّ البيانات الرئيسية متّصلة (كتلة الزبيب). عندما جمعت جميلة البيانات، قرّبت كل كتلة إلى أقرب غرام. يعني ذلك أن بعض الكتل الحقيقية للزبيب تقع بين مجموعتَين منفصلتَين. ولمراعاة ذلك، تم رسم كل عمود بناء على الحدَّين الأعلى والأدنى. لذا، ترسم الفئة ١٦–٢٠ من ١٥,٥ ≤ ك < ٢٠,٥ وهكذا... حيث أن قبضة واحدة من الزبيب كتلتها ٢٠,٥٦ غم تقع في الفئة ٢١–٢٥، لأن حدود الفئة هي ٢٠,٥–٢٥,٥ غم.

سابقًا

تعلمت الحد الأعلى والحد الأدنى في الصف ٩

تمارين ٧-٢-أ

طبّق مهاراتك

١) الجدول التالي يوضّح كتل الأطفال الذين وُلدوا في شهر واحد:

الكتلة (ك (كغم))	٠,٥ ≤ ك < ١,٥	١,٥ ≤ ك < ٢,٥	٢,٥ ≤ ك < ٣,٥	٣,٥ ≤ ك < ٤,٥	٤,٥ ≤ ك < ٥,٥
عدد الأطفال	١	١٢	٣١	١٦	٠

أ ما الفئة المنوالية لكتل الأطفال؟

ب كم طفلاً كتلته أقلّ من ٢,٥ كغم؟

ج ارسم المُدرّج التكراري لعرض النتائج.

٢) سجّلت أمل طول فترات المكالمات الهاتفية (ن) بالدقائق التي أجرتها على هاتفها المحمول كما هو مُوضَّح في الجدول التالي:

أطوال فترات المكالمات الهاتفية (ن (دقيقة))	التكرار
٠ ≤ ن < ٢	١٥
٢ ≤ ن < ٤	٤٣
٤ ≤ ن < ٦	١٢
٦ ≤ ن < ٨	١٩
٨ ≤ ن < ١٠	١٥
١٠ ≤ ن < ١٢	١٠
١٢ ≤ ن < ١٤	١١
١٤ ≤ ن < ١٦	١٧

أ ما عدد الاتّصالات الهاتفية التي أجرتها أمل؟

ب ما طول المكالمة الأكثر تكرارًا؟

ج ارسم مُدرّجًا تكراريًّا لعرض النتائج.

د أنشئ جدولاً تكراريًّا جديدًا لهذه النتائج مستخدمًا الفئات المُعطاة في الجدول التالي:

الفئة	٠ ≤ ن < ٤	٤ ≤ ن < ٨	٨ ≤ ن < ١٢	١٢ ≤ ن < ١٦
التكرار				

هـ ارسم مُدرّجًا تكراريًّا لعرض النتائج في الجزئية (د).

و اكتب عددًا من العبارات لتُقارن بين التوزيعَين الظاهرَين في المُدرّجَين التكراريَّين.

٣) قطعت سميرة ٣٠ قطعة من حبل مُقدّرة طول كل منها بـ ٣٠ سم، ثم قامت أختها بقياس أطوال القطع، وحصلت على الأطوال الحقيقية التالية:

٢٩,١	٣٠,٢	٣٠,٥	٣١,١	٣٢,٠	٣١,٣	٢٩,٨	٢٩,٥	٣١,٦	٣٢,٤
٣٢,١	٣٠,٢	٣١,٧	٣١,٩	٣٢,١	٢٩,٩	٣٢,١	٣١,٤	٢٨,٩	٢٩,٨
٣١,٢	٣١,٢	٣٠,٥	٢٩,٧	٣٠,٣	٣٠,٤	٣٠,١	٣١,١	٢٨,٨	٢٩,٥

أ) ارسم جدولاً تكراريًّا مناسبًا لهذه البيانات. استخدم فئات متساوية في الطول.

ب) أنشىء مُدرّجًا تكراريًّا لعرض هذه الأطوال.

ج) هل كان تقدير سميرة دقيقًا؟ فسّر إجابتك.

٤) سجّلت شرطة مرور مدينة مسقط عدد السيّارات التي تسير على الطريق السريع يوم الجمعة، وسجّلت حدود التجاوز في سرعاتها. ارسم مُدرّجًا تكراريًّا لعرض هذه البيانات.

السرعة (كم/ ساعة) فوق الحدود المسموحة	١٠–١	٢٠–١١	٣٠–٢١	٤٠–٣١	٥٠–٤١
التكرار	٤٧	٢١	٣٢	٧	٤

٥) يمثّل الجدول التالي درجات اختبار الذكاء IQ لمجموعة من الطلبة:

درجة اختبار الذكاء	التكرار (ت)
٩٩–٩٥	٣
١٠٤–١٠٠	٨
١٠٩–١٠٥	٢١
١١٤–١١٠	٢٤
١١٩–١١٥	٦
١٢٤–١٢٠	٣
١٢٩–١٢٥	٥
١٣٤–١٣٠	٢
١٤٠–١٣٥	١

ارسم مُدرّجًا تكراريًّا لعرض هذه البيانات.

قد تجد في كتب أخرى استخدام المُدرّج التكراري لبيانات مُنفصلة. يُعدّ التمرين ٥ مثالاً شائعًا على ذلك. ينبغي لك في هذه الحالات، أن ترسم المُدرّج التكراري بتوسيع حدود كل فئة لتصبح بيانات متّصلة، كأن تُغيّر ٩٥–٩٩، و ١٠٠–١٠٤ إلى ٩٤,٥ ≤ ح < ٩٩,٥، ٩٩,٥ ≤ ح < ١٠٤,٥، وهكذا. لترسم الأعمدة البيانية من أجل عرض البيانات، عامل كل مجموعة 'كفئة'، وارسم الأعمدة مع ترك فراغات بينها.

٧-٢-ب المُدرّج التكراري ذو الفئات غير المتساوية

عندما تكون أطوال الفئات غير متساوية، قد يكون استخدام الارتفاع لإيجاد التكرار مُضلِّلًا. وعندما تكون الفئة التي يبلغ طولها ضعف طول فئة أخرى يكون لهما التكرار نفسه، لذا فإنّها تُغطّي ضعف المساحة، لذلك إذا استُخدِم الارتفاع ليمثّل التكرار، فإن الانطباع الأوّلي الذي يعطيه أنّه يتضمّن قيَمًا أكثر، وليس ضروريًّا أن يكون كذلك (لاحظ المثال ٣). ولكي يتم تجنُّب ذلك عندما تكون أطوال الفئات غير متساوية يُستخدم مقياس جديد للمحور الرأسي يُسمّى **كثافة التكرار**.

$$\text{كثافة التكرار (ك)} = \frac{\text{التكرار (ت)}}{\text{طول الفئة (ل)}}$$

تراعي كثافة التكرار طول الفئة عند حساب التكرار، لتجعله أكثر إنصافًا عند مقارنة فئات بأطوال مختلفة.

مُساعَدة

لاحظ أن:

ت = ك × ل = مساحة العمود.

يمكنك استخدام هذه العلاقة لتقرأ التكرار من المُدرّج التكراري.

هناك الكثير من التمارين التي تعتمد على هذا المفهوم.

مثـال ٤

يبيّن الجدول التالي ارتفاع ٢٥ نبتة:

أ ارسم مُدرّجًا تكراريًّا لعرض البيانات.

ب أوجد الفئة المنوالية للبيانات.

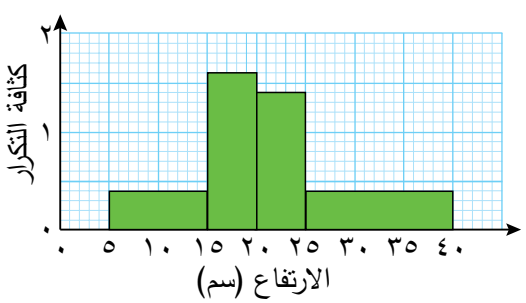
الارتفاع (ع (سم))	عدد النباتات
٥ ≤ ع < ١٥	٤
١٥ ≤ ع < ٢٠	٨
٢٠ ≤ ع < ٢٥	٧
٢٥ ≤ ع < ٤٠	٦

يمثّل ارتفاع النباتات (بالسنتيمتر) طول الفئات. ويمثّل التكرار عدد النباتات في كل فئة.

الحـلّ:

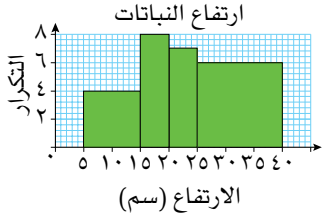
أ

الارتفاع (ع (سم))	عدد النباتات	طول الفئة (ل)	كثافة التكرار (ك = ت ÷ ل)
٥ ≤ ع < ١٥	٤	١٠	$\frac{٤}{١٠}$ = ٠,٤
١٥ ≤ ع < ٢٠	٨	٥	$\frac{٨}{٥}$ = ١,٦
٢٠ ≤ ع < ٢٥	٧	٥	$\frac{٧}{٥}$ = ١,٤
٢٥ ≤ ع < ٤٠	٦	١٥	$\frac{٦}{١٥}$ = ٠,٤



احسب أوّلًا كثافة التكرار بإضافة أعمدة إلى جدول التوزيع. ثم ارسم المحورَين وقرِّر المقياس المناسب لهما. استخدم ١ سم لتمثيل ١٠ سم في المحور الأفقي (الارتفاع)، واستخدم المقياس ٢ سم لكل ١ وحدة على المحور الراسي (كثافة التكرار)، وسمّه كثافة التكرار. ارسم المُدرّج التكراري، مع الانتباه الكبير للمقاييس على المحورَين.

إذا مُثّلت البيانات مع التكرار بدلاً من كثافة التكرار (انظر إلى المدرج التكراري في الأسفل)، سيبدو وكأنّ هناك نباتات في الفئة ٢٥ – ٤٠ أكثر مما هي في الفئة ٥ – ١٥، لكن كثافة التكرار لهما هي في الواقع متساوية. (انظر إلى المُدرّج التكراري في المثال ٤). بدا طول الفئة الكبير هُنا مُضلِّلًا. لذلك علينا استخدام كثافة التكرار، لأنها طريقة أكثر إنصافًا عند مقارنة التكرارات لفئات مختلفة في الطول.



ب	١٥ ⩽ ع > ٢٠	الفئة المنوالية هي الفئة التي يكون لها أكبر كثافة تكرار.

تمارين ٧-٢-ب

١) تمّ استطلاع ١٤٠ شخصًا حضروا حفلًا مدرسيًّا لجمع التبرُّعات، استهدف معرفة عدد حبات الحلوى الموضوعة في إناء زجاجي. أُجري سحب على أسماء الذين توقّعوا الإجابة الصحيحة ليفوزوا بقطع الحلوى. يبيّن الجدول التالي إجابات المُستطلعين:

عدد حبات الحلوى (ع)	التكرار (ت)
١٠٠ ⩽ ع > ٢٠٠	١٨
٢٠٠ ⩽ ع > ٢٥٠	١٨
٢٥٠ ⩽ ع > ٣٠٠	٣٢
٣٠٠ ⩽ ع > ٣٥٠	٣١
٣٥٠ ⩽ ع > ٤٠٠	٢١
٤٠٠ ⩽ ع > ٥٠٠	٢٠

أ استخدم الجدول لتحسب كثافة التكرار لكل فئة.

ب أنشىء مُدرّجًا تكراريًّا لعرض البيانات. استخدم مقياس الرسم ١ سم = ١٠٠ حبّة حلوى على المحور الأفقي، و١ سم = ٠,٢ وحدة على المحور الرأسي.

ج ما الفئة المنوالية لهذه البيانات؟

٢) يبيّن الجدول التالي كتل الأطفال الذين يراجعون العيادة الصحّية (مُقرَّبة إلى أقرب كغم). ارسم مُدرّجًا تكراريًّا لعرض البيانات:

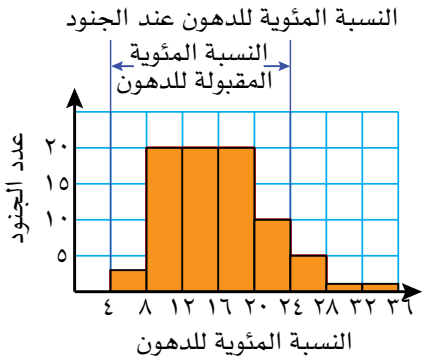
الكتلة (ك (كغم))	التكرار
٦ ⩽ ك > ٩	٩
٩ ⩽ ك > ١٢	١٢
١٢ ⩽ ك > ١٨	٣٠
١٨ ⩽ ك > ٢١	١٥
٢١ ⩽ ك > ٣٠	١٨

٣) يُبيّن الجدول التالي كتل مجموعة من الممثّلين المسرحيين. ارسم مُدرّجًا تكراريًّا لعرض البيانات:

الكتلة (ك (كغم))	التكرار
٦٠ ≤ ك < ٦٣	٩
٦٣ ≤ ك < ٦٤	١٢
٦٤ ≤ ك < ٦٥	١٥
٦٥ ≤ ك < ٦٦	١٧
٦٦ ≤ ك < ٦٨	١٠
٦٨ ≤ ك < ٧٢	٨

طبّق مهاراتك

٤) خضع مجموعة من الجنود لاختبارات اللياقة، حيث حُسبت النسبة المئوية للدهون لدى كل منهم، ثم عُرضت النتائج في المُدرّج التكراري التالي:



أ كم جنديًّا خضعوا للاختبار؟

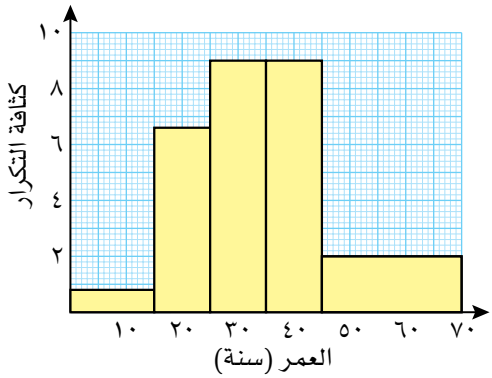
ب كم جنديًّا نسبة الدهون لديه ضمن الحدود الصحّية المقبولة؟

ج كم جنديًّا نسبة الدهون لديه مرتفعة؟

د لماذا لا يوجد عمود على الفترة ٠ – ٤؟

هـ هل تتوقّع توزيعًا مُشابهًا إذا قمت بتطبيق نفس الاختبارات على مجموعة أشخاص من مجتمعك المحلّي عشوائيًّا؟ فسِّر إجابتك.

٥) يبيّن المُدرّج التكراري التالي أعمار الأشخاص الذين يستخدمون مركز اللياقة البدنية في المجمع الرياضي، بعد الساعة ٥ مساءً:

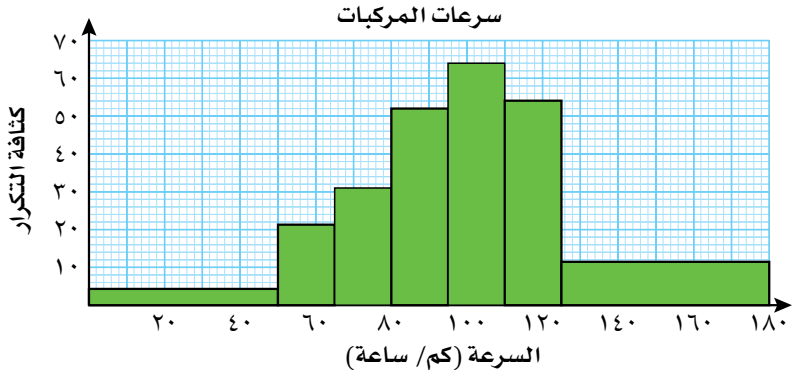


أ أكمل الجدول الآتي:

الكتلة (ك (كغم))	التكرار
٠ ≤ ك < ١٥	
١٥ ≤ ك < ٢٥	
٢٥ ≤ ك < ٣٥	
٣٥ ≤ ك < ٤٥	
٤٥ ≤ ك < ٧٠	

ب ما عدد الأشخاص الذين تقع أعمارهم بين ١٥ و ٣٥ من الذين يستخدمون مركز اللياقة بعد الساعة ٥ مساءً؟

٦) يستخدم الضابط أحمد برنامجًا حاسوبيًّا ليرسم مُدرّجًا تكراريًّا يبيّن متوسّط السرعة (كم/ ساعة) لعيّنة من المركبات التي تستخدم الطريق السريع، حيث حُدّدت السرعة الدنيا للطريق بـ ٥٠ كم/ ساعة، والسرعة القصوى بـ ١٢٥ كم/ ساعة:



أ هل من السهل معرفة عدد المركبات التي تسير بسرعة أقلّ من السرعة الدنيا، والمركبات التي تسير بسرعة أكبر من السرعة القصوى؟ فسّر إجابتك.

ب يعتقد الضابط أحمد أن التمثيل البياني يُظهر أن معظم الأشخاص ملتزمون بحدود السرعة المسموح بها. هل اعتقاده صحيح؟ فسّر إجابتك.

ج ساعد زملاء الضابط أحمد في معرفة العدد الحقيقي للمركبات التي تسير بسرعة أقلّ أو بسرعة أكبر من حدود السرعة المُحدّدة، وذلك بالاجابة عن الأسئلة الآتية:

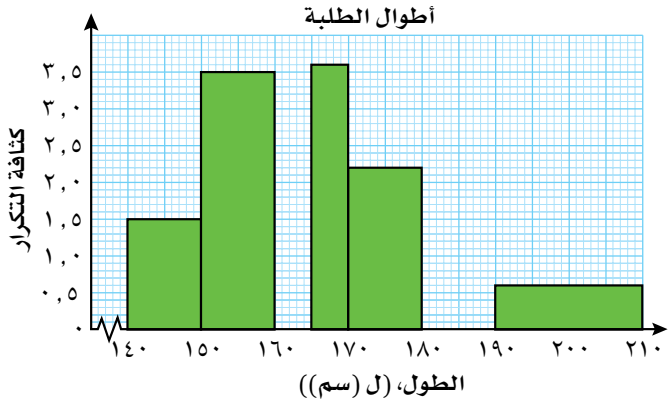
(١) أعد إنشاء الجدول التكراري التالي، مقرّبًا التكرارات إلى أقرب عدد كامل:

السرعة (ع (كم/ ساعة))	التكرار	طول الفئة	كثافة التكرار
٠ ≤ ع < ٥٠			٤,٨
٥٠ ≤ ع < ٦٥			٢١,٣
٦٥ ≤ ع < ٨٠			٣٣,٣
٨٠ ≤ ع < ٩٥			٥٢
٩٥ ≤ ع < ١١٠			٦٤
١١٠ ≤ ع < ١٢٥			٥٤,٦
١٢٥ ≤ ع < ١٨٠			١١,٦

(٢) كم عدد المركبات التي كانت سرعتها أقلّ من الحد الأدنى للسرعة؟

د ما النسبة المئوية في العيّنة للمركبات التي تجاوزت الحد الأقصى للسرعة المسموح بها؟

٧) يعرض كلّ من المُدرّج التكراري والجدول التاليَين – غير المكتملَين – معلومات عن أطوال مجموعة من الطلبة في الصف العاشر:



الطول (ل (سم))	التكرار
١٤٠ ≤ ل < ١٥٠	١٥
١٥٠ ≤ ل < ١٦٠	
١٦٠ ≤ ل < ١٦٥	٢٠
١٦٥ ≤ ل < ١٧٠	
١٧٠ ≤ ل < ١٨٠	
١٨٠ ≤ ل < ١٩٠	١٢
١٩٠ ≤ ل < ٢١٠	

أ استخدم المُدرّج التكراري لتكمل الجدول.

ب استخدم الجدول لتكمل المُدرّج التكراري.

ج حدّد الفئة المنوالية.

د قدّر النسبة المئوية لطلبة الصف العاشر الذين تزيد أطوالهم على ١٥٥ سم.