٧-٣ التكرار التراكُمي

قد تُسأل أحيانًا أسئلة مثل:

- كم شخصًا كتلته أقلّ من ٥٠ كيلوغرامًا؟
- كم سيّارة تسير بسرعة أكثر من ١٠٠ كم/ ساعة؟
- كم طالبًا حصل على درجة تقلّ عن ٥٠٪ في الاختبار؟

التراكُمي تعني 'زيادة مستمرة مع كل إضافة'.

يمكنك في الإحصاء استخدام **الجدول التكراري التراكُمي** أو **المنحنى التكراري التراكُمي** للإجابة عن أسئلة حول البيانات التي تصل إلى حدّ من حدود فئة مُعيّنة، ويمكنك أن تستخدم التكرار التراكُمي لتُقدّر الوسيط وتفسّره، ولتجد قيَم مواقع أخرى في مجموعة البيانات.

٧-٣-أ الجداول والمنحنيات التكرارية التراكُمية

يُعرف التكرار التراكُمي بأنّه 'مجموع مستمر' للدرجات أو النتائج (التكرار في كل فئة). يعطي التكرار التراكُمي عدد النتائج التي تساوي أو تقلّ عن حدّ فئة معيّنة. يُبيّن الجدول التالي درجات الطلبة في اختبار من ١٠ درجات (عدد مرّات تكرار كل نتيجة) إضافة إلى التكرار التراكُمي:

الدرجات من ١٠	التكرار (ت)	التكرار التراكُمي
٣	٤	٤
٤	٥	٩ = ٥ + ٤
٥	٣	١٢ = ٣ + ٩
٦	٣	١٥ = ٣ + ١٢
٧	٥	٢٠
٨	٧	٢٧
٩	٢	٢٩
١٠	١	٣٠
المجموع	٣٠	

- تُحسب القيَم في عمود التكرار التراكُمي بإضافة تكرار الفئة الحاليّة إلى التكرار التراكُمي السابق (أو بإضافة جميع التكرارات السابقة متضمّنة تكرار الفئة الحالية).
- يجب أن تكون آخر قيمة في عمود التكرار التراكُمي مساوية لمجموع التكرارات.

مثـال ٥

يُبيّن الجدول التالي ارتفاع مجموعة من النباتات خلال تجربة ما:

الارتفاع (ع (سم))	التكرار
٠ < ع ≤ ٥	٢٠
٥ < ع ≤ ١٠	٤٠
١٠ < ع ≤ ١٥	٦٠
١٥ < ع ≤ ٢٥	٨٠
٢٥ < ع ≤ ٥٠	٥٠
المجموع	٢٥٠

أ ارسم جدولاً تكراريًّا تراكُميًّا لهذه البيانات.

ب حدّد الفئة التي تتضمّن وسيط الارتفاعات.

الحـلّ:

أ

الارتفاع (ع (سم))	التكرار	التكرار التراكُمي
٠ < ع ≤ ٥	٢٠	٢٠
٥ < ع ≤ ١٠	٤٠	٦٠
١٠ < ع ≤ ١٥	٦٠	١٢٠
١٥ < ع ≤ ٢٥	٨٠	٢٠٠
٢٥ < ع ≤ ٥٠	٥٠	٢٥٠
المجموع	٢٥٠	

اجمع التكرارات وأنت تُكمل عمود التكرار التراكُمي.

ب ١٥ < ع ≤ ٢٥

تم إعطاء ارتفاع ٢٥٠ نبتة، لذا فإن وسيط الارتفاعات يساوي الوسط الحسابي لارتفاعَي النبتتَين في المَوقعَين الـ ١٢٥ والـ ١٢٦. إذا نظرت إلى التكرار التراكُمي، ستجد أن هذه الارتفاعات تقع في الفئة الرابعة من الجدول (١٢٥، ١٢٦ وكلتاهما أكبر من ١٢٠ وأقلّ من ٢٠٠).

سابقًا

تمّ في الوحدة ٥ تقديم فئات الوسيط للبيانات المُجمّعة. سترى أن منحنى التكرار التراكُمي سيمكّنك من تقدير الوسيط عندما يكون عدد البيانات كبيرًا.

منحنى التكرار التراكُمي

عندما تعيّن التكرار التراكُمي مع الحد الأعلى لكل فئة، ستحصل على المنحنى التكراري التراكُمي.

تُسمى المنحنيات التراكُمية أيضًا بالمنحنيات القوسية، لأنها تشبه الأقواس المُشيّدة في بعض الجوامع.

مُساعَدة

يجب أن تعيّن التكرار التراكُمي عند نقطة الحد الأعلى للفئة. لا تخلط بين هذا الدرس وحسابات مراكز الفئات التي استخدمتها لتقدير الوسط الحسابي في الجداول التكرارية.



مثـال ٦

يُبيّن الجدول التالي درجات ٣٠٠ طالب في أحد الاختبارات:

الدرجة	التكرار
١٠-١	٣
٢٠-١١	٧
٣٠-٢١	١٣
٤٠-٣١	٢٩
٥٠-٤١	٤٤
٦٠-٥١	٦٥
٧٠-٦١	٧٠
٨٠-٧١	٤٩
٩٠-٨١	١٤
١٠٠-٩١	٦

أ ارسم الجدول التكراري التراكُمي للدرجات.

ب أنشئ منحنى التكرار التراكُمي للدرجات.

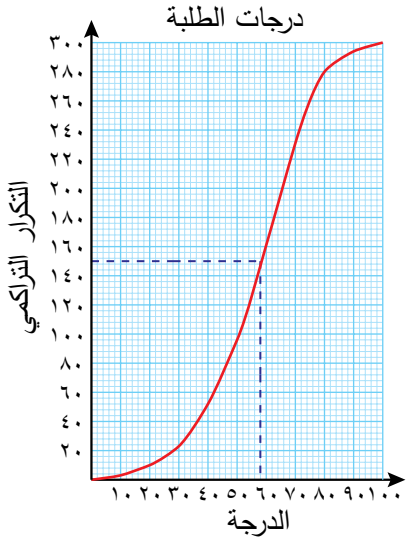
ج قدّر الوسيط للدرجات.

الحــلّ:

أ

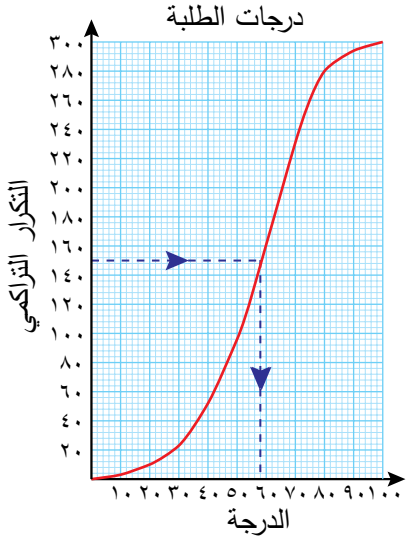
الدرجة	التكرار	التكرار التراكُمي
١٠-١	٣	٣
٢٠-١١	٧	١٠
٣٠-٢١	١٣	٢٣
٤٠-٣١	٢٩	٥٢
٥٠-٤١	٤٤	٩٦
٦٠-٥١	٦٥	١٦١
٧٠-٦١	٧٠	٢٣١
٨٠-٧١	٤٩	٢٨٠
٩٠-٨١	١٤	٢٩٤
١٠٠-٩١	٦	٣٠٠

ب



ارسم المنحنى التراكُمي. تذكّر أن تعيّن النقاط عند الحدود العليا للفئات.

ج



وسيط الدرجات يساوي ٥٨

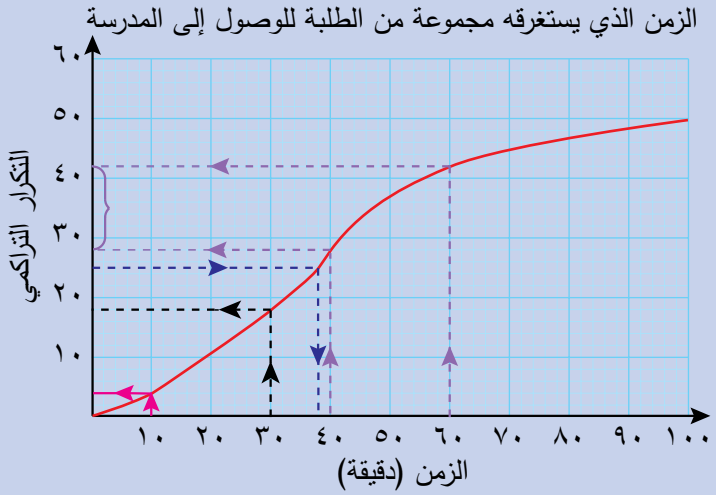
الوسيط هو القيمة التي تقع في المُنتصف. يمكن في البيانات المتّصلة إيجاد قيمة المُنتصف بقسمة مجموع التكرارات على ٢ $\frac{٣٠٠}{٢}$ = ١٥٠، فيكون موقع الوسيط هو ١٥٠ ارسم مستقيمًا من النقطة التي تمثّل الطالب ذا الموقع الـ ١٥٠ (الواقعة على المحور الرأسي) موازيًا لمحور الدرجات (المحور الأفقي). ثم ارسم عمودًا من نقطة تقاطُع هذا المستقيم مع المنحنى على المحور الأفقي. اقرأ القيمة من المحور الأفقي.

سابقًا

تعلّمت في الوحدة ٥ كيف تجد الوسيط لمجموعة بيانات منفصلة. لاحظ أن منحنى التكرار التراكُمي يتيح لك أن تجد تقديرًا للقيمة الحقيقية للوسيط أكثر من تحديد الفئة.

مثـال ٧

يبيّن منحنى التكرار التراكُمي التالي الزمن الذي يستغرقه مجموعة من الطلبة للوصول إلى المدرسة:



استخدم المنحنى لتجد:

أ العدد الكلّي للطلبة.

ب تقديرًا لوسيط الزمن الذي يستغرقه الطلبة للوصول إلى المدرسة.

ج عدد الطلبة الذين يحتاجون إلى أقلّ من ١٠ دقائق للوصول إلى المدرسة.

د عدد الطلبة الذين يحتاجون إلى أكثر من ٣٠ دقيقة للوصول إلى المدرسة.

هـ عدد الطلبة الذين يحتاجون بين ٤٠ دقيقة وساعة واحدة للوصول إلى المدرسة.

الحـلّ:

أ	٥٠	تقع أعلى نقطة في المنحنى عند العدد ٥٠، وهذا هو مجموع التكرارات.
ب	٣٨	$\frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥ وهذه هي النتيجة الـ ٢٥، ارسم مستقيمًا أفقيًّا من النقطة ٢٥، ثم أنزل عمودًا من نقطة تقاطُع المستقيم مع المنحنى على المحور الأفقي.
ج	٤	اقرأ التكرار التراكُمي المُقابل لـ ١٠ دقائق.
د	٥٠ – ١٨ = ٣٢	اطرح التكرار التراكُمي المُقابل لـ ٣٠ دقيقة (أي ١٨) من المجموع الكلّي للتكرارات.
هـ	٤٢ – ٢٨ = ١٤	اطرح التكرار التراكُمي المُقابل لـ ٤٠ دقيقة (أي ٢٨) من التكرار التراكُمي المُقابل لـ ٦٠ دقيقة (أي ٤٢).

سابقًا

تعلّمت كيف تجد الوسط الحسابي التقديري لبيانات مُجمّعة في الوحدة ٥

مثـال ٨

تمّت زراعة ٢٠ بذرة فاصوليا لإجراء تجربة علمية. وبعد ثلاثة أسابيع تم قياس ارتفاعات نباتات الفاصوليا وتسجيل النتائج في الجدول التالي:

الارتفاع (ع (سم))	٠ ≤ ع < ٣	٣ ≤ ع < ٦	٦ ≤ ع < ٩	٩ ≤ ع < ١٢
التكرار	٢	٥	١٠	٣

أ قدّر الوسط الحسابي لارتفاعات النباتات.

ب ارسم منحنى التكرار التراكُمي وقدّر الوسيط لارتفاعات النباتات.

الحـلّ:

أ

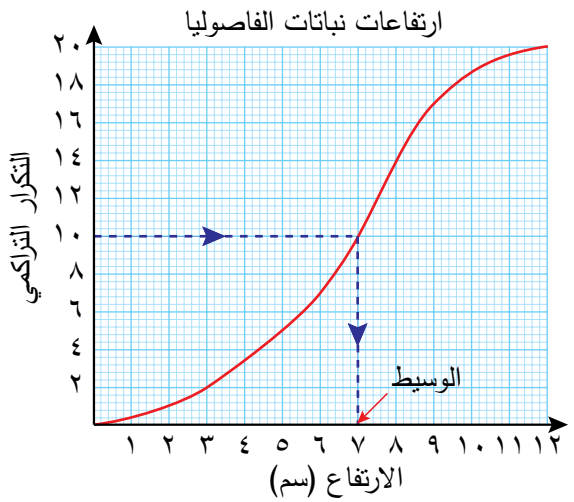
الارتفاع (ع (سم))	المركز (م)	التكرار (ت)	(ت × م)	التكرار التراكُمي
٠ ≤ ع < ٣	١,٥	٢	٣	٢
٣ ≤ ع < ٦	٤,٥	٥	٢٢,٥	٧
٦ ≤ ع < ٩	٧,٥	١٠	٧٥	١٧
٩ ≤ ع < ١٢	١٠,٥	٣	٣١,٥	٢٠
المجموع		٢٠	١٣٢	

الوسط الحسابي للارتفاع = $\frac{١٣٢}{٢٠}$ = ٦,٦ سم

(الوسط الحسابي = $\frac{\Sigma (ت \times م)}{\Sigma ت}$)

تحتاج إلى مراكز الفئات لتساعدك على إيجاد الوسط الحسابي التقديري، كما ستحتاج إلى التكرار التراكُمي لإيجاد تقدير للوسيط، لذا تلزمك إضافة أعمدة إلى الجدول التكراري. لا تنسَ تسمية الأعمدة الجديدة.

ب



وسيط الارتفاعات = ٧,٠ سم

$\frac{٢٠}{٢}$ = ١٠، لذا يكون وسيط الارتفاعات هو قيمة الارتفاع المناظرة للقيمة العاشرة في التكرار التراكمي.

تمارين ٧-٣-أ

١) يعرض الجدول التالي ارتفاع ٢٥ نبتة، مُقرّبًا إلى أقرب سنتيمتر:

الارتفاع (سم)	٦–١٥	١٦–٢٠	٢١–٢٥	٢٦–٤٠
عدد النباتات	٣	٧	١٠	٥

أ ارسم جدول التكرار التراكُمي لهذه البيانات.

ب في أي فئة يقع وسيط الارتفاعات؟

ج ارسم منحنى التكرار التراكُمي واستخدمه لتقدّر ارتفاعات النباتات، مُقرّبًا الناتج إلى أقرب سنتيمتر.

٢) يبيّن الجدول التالي قيمة النقود (بالريال العُماني) التي صرفتها مجموعة من الطلبة على شراء الكتب:

قيمة النقود المصروفة (ريال عُماني)	عدد الطلبة
٠ < س ⩽ ١٠	٠
١٠ < س ⩽ ٢٠	٤
٢٠ < س ⩽ ٣٠	٨
٣٠ < س ⩽ ٤٠	١٢
٤٠ < س ⩽ ٥٠	١١
٥٠ < س ⩽ ٦٠	٥

أ احسب القيمة التقديرية للوسط الحسابي لقيمة النقود التي صُرفت على شراء الكتب.

ب استخدم المعلومات المُبيّنة في الجدول أعلاه لتجد قيمة كل من ف، ق، ر في جدول التكرار التراكُمي التالي:

قيمة النقود (ريال عُماني)	⩽ ١٠	⩽ ٢٠	⩽ ٣٠	⩽ ٤٠	⩽ ٥٠	⩽ ٦٠
التكرار التراكُمي	٠	٤	ف	ق	ر	٤٠

ج ارسم منحنى التكرار التراكُمي مستخدمًا مقياس الرسم ١ سم لتمثّل ١٠ وحدات على كل محور.

د استخدم المنحنى الناتج لتقدّر وسيط قيمة النقود التي صُرفت على شراء الكتب.

٣) يبيّن جدول التكرار التراكُمي التالي كتل الأطفال الذين يزورون عيادة طبيب الأطفال في أحد المراكز الصحّية:

الكتلة (ك (كغم))	التكرار التراكُمي
٠ < ك ⩽ ١٠	١٢
١٠ < ك ⩽ ٢٠	٢٦
٢٠ < ك ⩽ ٣٠	٣٣
٣٠ < ك ⩽ ٤٠	٤١
٤٠ < ك ⩽ ٥٠	٤٦
٥٠ < ك ⩽ ٦٠	٥٠

أ ارسم منحنى التكرار التراكُمي مُستخدمًا المقياس ١ سم = ١٠ كغم على المحور الأفقي، والمقياس ٠,٥ سم = ٥ أطفال على المحور الرأسي.

ب قدّر الوسيط لكتل الأطفال.

ج كم طفلاً كتلته أكبر من وسيط الكتل؟

٧-٣-ب الرُّبَيعات

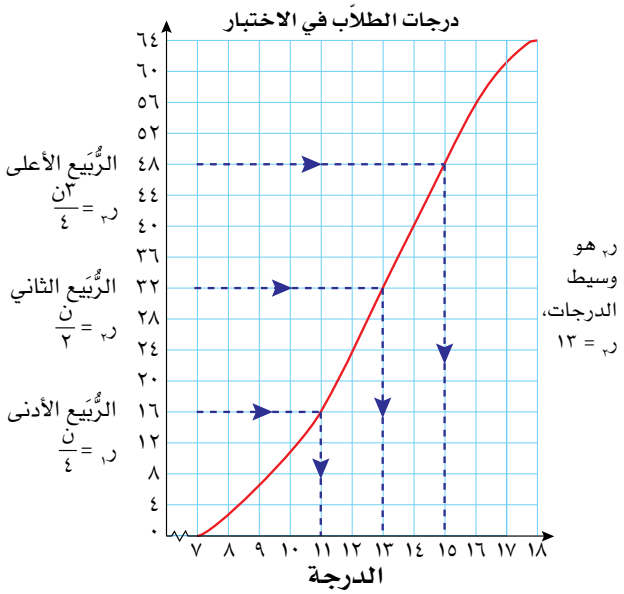
سابقًا

راجع ما درسته عن الرُّبَيعات والمدى الرُّبيعي في الوحدة ٥ إن احتجت إلى ذلك. ◀

درست المدى في الوحدة (٥)، وهو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة (أكبر قيمة – أصغر قيمة)، واستخدمته لتعرف مدى تشتُّت مجموعات البيانات المختلفة. يتأثر المدى بالقيَم المُتطرّفة، لذلك لا يُعدّ المقياس الأفضل لانتشار البيانات.

يمكن تقسيم البيانات الظاهرة في منحنى التكرار التراكُمي إلى أربع مجموعات تُسمّى **الرُّبَيعات** لتجد مقياس للانتشار يسمى **المدى الرُّبَيعي**، وهو أكثر تمثيلاً من المدى لأنه لا يتأثّر بالقيَم المُتطرّفة.

يُبيّن منحنى التكرار التراكُمي التالي الدرجات التي حصل عليها ٦٤ طالبًا في اختبار ما، وهي معروضة أدناه:



- حصل ٤٨ طالبًا على الدرجة ١٥ أو أقل. ١٥ هي قيمة الرُّبَيع الأعلى أو الرُّبَيع الثالث ر٣
- حصل ٣٢ طالبًا على الدرجة ١٣ أو أقل. ١٣ هي قيمة الرُّبَيع الثاني ر٢ أو وسيط الدرجات.
- حصل ١٦ طالبًا على أقلّ من ١١ درجة. ١١ هي قيمة الرُّبَيع الأدنى أو الرُّبَيع الأول ر١

تم استخدام الأعداد الكاملة في هذا المثال لتجعل فهمه أكثر سهولة. يتمّ في العادة تقريب الإجابات حيث تحتوي على أعداد عشرية وكسور.

عندما تجد مواقع الرُّبَيعات من منحنى التكرار التراكُمي، فإنك لن تستخدم القواعد $\frac{(ن + ١)}{٤}$، $\frac{(ن + ١)}{٢}$، $\frac{٣}{٤}(ن + ١)$ التي واجهتها مع البيانات المنفصلة في الوحدة ٥، لكنّك ستستخدم $\frac{ن}{٤}$، $\frac{ن}{٢}$، $\frac{٣ن}{٤}$، بدلاً منها.

المدى الرُّبَيعي

المدى الرُّبَيعي يساوي الفرق بين الرُّبَيع الأعلى والرُّبَيع الأدنى: ر٣ – ر١

وهذا يساوي مدى الـ ٥٠٪ من الدرجات، أو وسيط النصف الأعلى للقيَم – وسيط النصف الأدنى للقيَم.

يبدو من المثال أعلاه، المدى الرُّبَيعي = ١٥ – ١١ = ٤

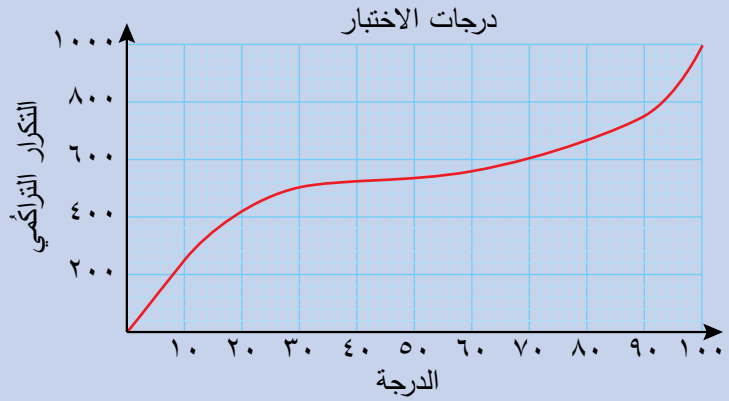
وبما أن المدى الرُّبَيعي لا يستخدم أي قيمة مُتطرّفة، فقد اعتُبر مقياسًا ثابتًا للانتشار أفضل من المدى.

سابقًا

تم استخدام المدى في الوحدة ٥ للمقارنة بين مجموعات البيانات.

مثـــال ٩

يبيّن منحنى التكرار التراكُمي التالي درجات ١٠٠٠ طالب في أحد الاختبارات:



استخدم منحنى التكرار التراكُمي لتقدِّر قيمة كلّ من:

أ الوسيط للدرجات.

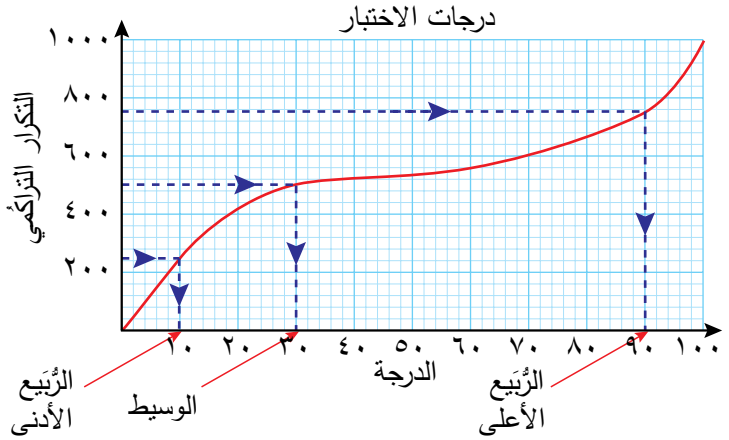
ب الرُّبَيع الأدنى للدرجات.

ج الرُّبَيع الأعلى للدرجات.

د المدى الرُّبَيعي للدرجات.

الحـــلّ:

ارسم مستقيمات على منحنى التكرار التراكمي لتجد القيَم:



أ	استخدم المحور الأفقي لتقدّر الوسيط، وهو الدرجة ٣٠	ن = ١٠٠٠ فيكون موقع $ر_{٢}$ على المحور الرأسي هو $\frac{ن}{٢}$ = ٥٠٠ ارسم مستقيمًا يتقاطع مع المنحنى.
ب	استخدم المحور الأفقي لتقدّر الرُّبَيع الأدنى، وهو الدرجة ١٠	ن = ١٠٠٠ فيكون موقع $ر_{١}$ على المحور الرأسي هو $\frac{ن}{٤} = \frac{١٠٠٠}{٤}$ = ٢٥٠
ج	استخدم المحور الأفقي لتقدّر الرُّبَيع الأعلى، وهو الدرجة ٩٠	ن = ١٠٠٠ فيكون موقع $ر_{٣}$ على المحور الرأسي هو $\frac{٣ن}{٤} = \frac{٣ \times ١٠٠٠}{٤}$ = ٧٥٠
د	المدى الرُّبَيعي = $ر_{٣} - ر_{١}$ = ٩٠ − ١٠ = ٨٠ درجة	

المِئينات

سابقًا

تم تقديم المئينات باختصار في الوحدة ٥

عندما تتعامل مع عدد كبير من البيانات، مثل نتائج دبلوم التعليم العام، أو معدّل أطوال وكتل الأطفال في مجموعات مختلفة الأعمار، يكون من المفيد تقسيمها إلى مجموعات أصغر تُسمّى **المِئينات**.

تقسم المئينات البيانات إلى ١٠٠ قسم متساوٍ.

لتجد موقع مئين ما، استخدم الصيغة $\frac{م ن}{١٠٠}$، حيث يمثّل (م) المئيني الذي تبحث عنه، ويمثّل (ن) مجموع التكرارات.

إذا استخدمت مجموعة البيانات الموجودة في المثال (٩):

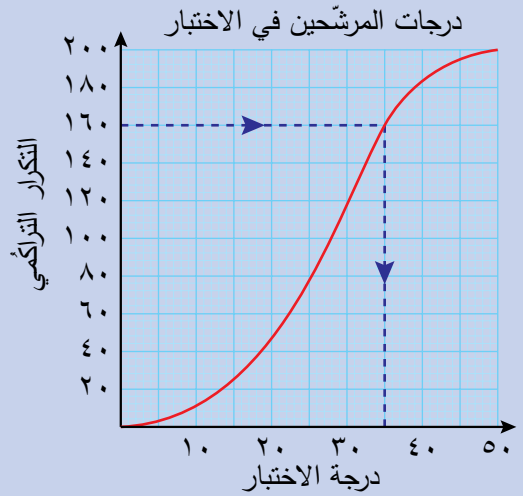
تجد أنّ موقع المئيني العاشر على محور التكرار التراكُمي هو $م_{١٠} = \frac{١٠ \times ١٠٠٠}{١٠٠}$ = ١٠٠

ويكون موقع المئيني الخامس والثمانين على محور التكرار التراكُمي هو $م_{٨٥} = \frac{٨٥ \times ١٠٠٠}{١٠٠}$ = ٨٥٠ (تذكّر أن تتحرّك يمينًا إلى المنحنى، ثم رأسيًّا إلى الأسفل حتى المحور الأفقي، لتجد قيَم المئينات)

يُمثّل المدى المئيني الفرق بين المئينات المعطاة. وهو في المثال السابق، م$_{٨٥}$ – م$_{١٠}$ تم تقديم المئينات لأوّل مرّة في الوحدة (٥)، ولكن لم يُستخدم سوى المئينيَّين م$_{٢٥}$، م$_{٧٥}$، وذلك لإيجاد المدى الرُّبَيعي. كما طُرح سؤال في بداية الدرس (٥-٣-أ) المئينات والرُّبَيعات، وهو: 'سيتقدّم كل المرشّحين الحاصلين على درجة أعلى من المئيني الثمانين للمقابلة. ما معنى ذلك؟' يبيّن لك المثال التالي كيف تجيب عن هذا السؤال.

مثـــال ١٠

يبيّن منحنى التكرار التراكُمي التالي نتائج اختبار ٢٠٠ مرشّح ممّن تقدّموا حسب الإعلان عن الوظيفة. سيستدعى إلى المقابلة فقط المرشحون الذين حصلوا على درجة أعلى من م$_{٨٠}$. ما أقلّ درجة يمكن أن يحقّقها المُرشَّح لكي يُستدعى إلى المُقابلة؟



الحـــلّ:

٨٠٪ من الـ ٢٠٠ يساوي ١٦٠

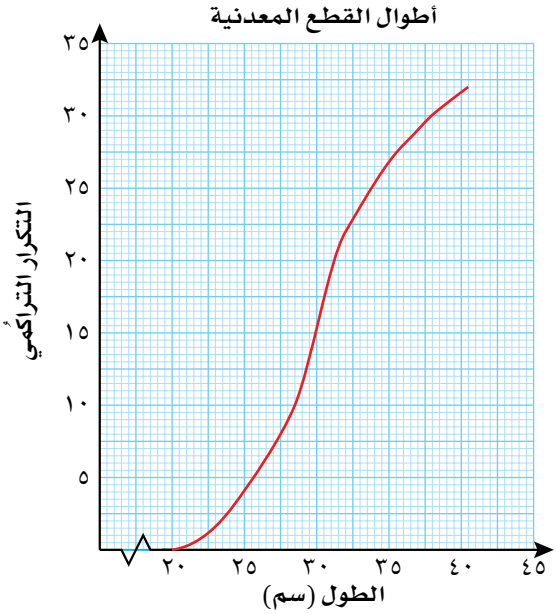
فتكون، قيمة م$_{٨٠}$ في الاختبار ٣٥ درجة.

سيُستدعى إلى المُقابلة فقط المرشّحون الذين حصلوا على أكثر من ٣٥ درجة في الاختبار.

حدِّد على محور التكرار التراكمي ١٦٠، ثم حدِّد على المنحنى النقطة التي تقابلها على محور درجة الاختبار.

تمارين ٧-٣-ب

١) يظهر منحنى التكرار التراكمي التالي أطوال ٣٢ قطعة معدنيّة. استخدم المنحنى لتقدّر قيمة كلّ من:



أ الوسيط

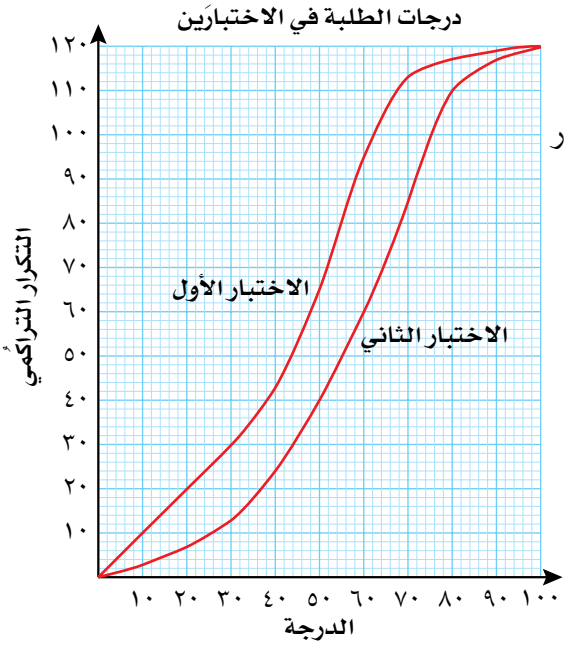
ب $م_{٢٥}$

ج $م_{٧٥}$

د المدى الرُّبَيعي

هـ $م_{٤٠}$

٢) يُوضّح منحنى التكرار التراكُمي التالي النتائج التي حصل عليها ١٢٠ طالبًا في اختبارَين في الرياضيات.



أ استخدم المنحنى لتجد:

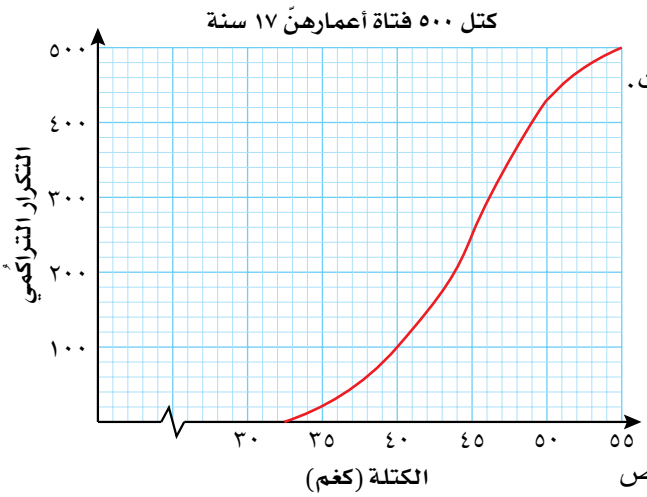
(١) وسيط الدرجات لكل اختبار

(٢) المدى الرُّبَيعي لكل اختبار

(٣) المئيني الستّين

ب ما الدرجة التي ترغب في الحصول عليها لتكون أكبر من المئيني التسعين في الاختبارين؟

٣) يبيّن منحنى التكرار التراكُمي التالي كتل ٥٠٠ فتاة (كغم) أعمارهنّ ١٧ سنة.



أ استخدم المنحنى لتجد:

(١) الوسيط لكتل الفتيات.

(٢) كم فتاة تقع كتلتها بين ٤٠ و ٥٠ كغم؟

ب ما النسبة المئوية للفتيات اللاتي لا يُسمح لهن باللعب في مدينة الألعاب؟ (علمًا بأن الحد الأعلى لكتلة الشخص المسموح له باللعب هو ٥١ كغم).

٤) يُمثِّل جدول التكرار التراكُمي التالي سرعات ٢٠٠ سيّارة على الطريق السريع:

السرعة (ع (كم/ ساعة))	التكرار التراكُمي
ع < ٦٠	٢
٦٠ ≤ ع < ٧٠	٨
٧٠ ≤ ع < ٨٠	٢٤
٨٠ ≤ ع < ٩٠	٤٥
٩٠ ≤ ع < ١٠٠	٩٦
١٠٠ ≤ ع < ١١٠	١٢٣
١١٠ ≤ ع < ١٢٠	١٧١
١٢٠ ≤ ع < ١٣٠	١٩٥
١٣٠ ≤ ع < ١٤٠	٢٠٠
المجموع	٢٠٠

أ ارسم منحنى التكرار التراكُمي لعرض البيانات، مستخدمًا مقياس الرسم ١ سم لكل ١٠ كم/ساعة على المحور الأفقي، ومقياس الرسم ١ سم لكل ١٠ سيّارات على المحور الرأسي.

ب استخدم المنحنى لتُقدّر الوسيط والرُّبَيع الأعلى والرُّبَيع الأدنى لهذه البيانات.

ج قدّر المدى الرُّبَيعي.

د حُدّدت السرعة القصوى على جزء من الطريق السريع بـ ١٢٠ كم/ الساعة. ما النسبة المئوية للسيّارات التي تجاوزت هذه السرعة؟