

الوحدة الأولى

الأسس واللوغاريتمات الطبيعيّة

١ - ٢ الدالّة اللوغاريتميّة الطبيعيّة ومعكوسها

القناة على اليوتيوب باسم: الأستاذ حمد الرديني
gsm 99334198
kaah959@gmail.com



١ ـ ٢ الدالّة اللوغاريتميّة الطبيعيّة ومعكوسها

صيغة الدالة اللوغاريتمية هي د (س) = لـو$_{أ}$ س، حيث أ هو أساس اللوغاريتم، فمثلًا:
د (س) = لـو$_{٢}$ س حيث ٢ هو أساس اللوغاريتم، د (س) = لـو س حيث ١٠ هو أساس اللوغاريتم.

وعند استخدام عدد أويلر (هـ) كأساس للوغاريتم في الدالة اللوغاريتمية بحيث تكون د (س) = لـو$_{هـ}$ س، فتسمى بالدالة اللوغاريتمية الطبيعية وتختصر إلى الصورة د (س) = لطـ س
توجد العديد من دوال اللوغاريتم الطبيعي المبنية على دالة اللوغاريتم الطبيعي د (س) = لطـ س ، والتي لها خصائص مماثلة، مثل د (س) = ٣ لطـ س ، د (س) = $\frac{١}{٤}$ لطـ س ، د (س) = ١ + ٦ لطـ س

لإيجاد قيمة اللوغاريتم الطبيعي لطـ٢ باستخدام الحاسبة يتم الضغط على المفاتيح ln 2 = فتحصل على الناتج ٠,٧ لأقرب منزلة عشرية.

مثال

استخدم الحاسبة لإيجاد القيم الآتية، مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية إن أمكن:

أ) لطـ ١٣ = ٢,٥٦٥

ب) لطـ ٠,٥ + لطـ هـ = ٠,٣٠٧

ج) هـ$^{\text{لطـ }١١}$ + هـ$^{\text{لطـ }٨}$ = ١٩

د) لطـ هـ^{٥} − لطـ هـ^{٢} = ٣

هـ) هـ^{٢} − لطـ ٥٠ = ٣,٤٧٧

kaah959@gmail.com gsm 99334198

١ ـ ٢ الدالّة اللوغاريتميّة الطبيعيّة ومعكوسها

يمكن تطبيق قوانين اللوغاريتم التي تعلمتها سابقًا على اللوغاريتمات الطبيعية.

نتيجة ٢

لكل أ > ٠ ، س > ٠ ، ص > ٠ :

قانون الضرب: لطـ س ص = لطـ س + لطـ ص

قانون القسمة: لطـ $\frac{س}{ص}$ = لطـ س − لطـ ص

قانون القوة: لطـ أ^{س} = س لطـ أ

بالإضافة إلى:

لطـ ١ = ٠ ، لطـ هـ = ١ ، لطـ هـ^{س} = س ، هـ$^{لطـ س}$ = س ، لطـ $\frac{١}{س}$ = − لطـ س

مثال بدون استخدام الحاسبة أوجد ناتج:

أ لطـ هـ^{٥,٢} − لطـ هـ^{٣,٣}

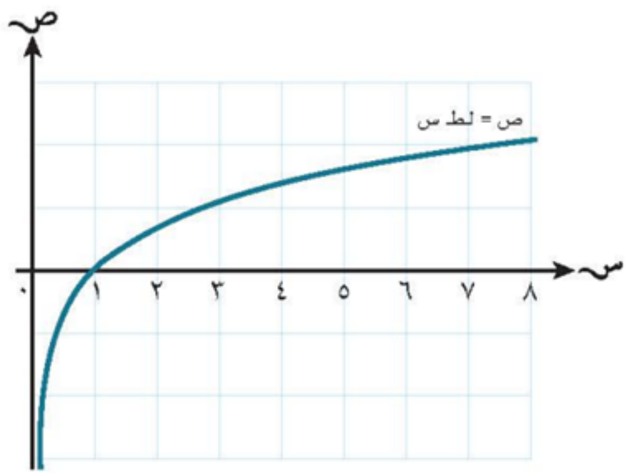
ب ٤ لطـ هـ^{٧} + هـ$^{٢ لطـ ٣}$

ج لطـ $\frac{٣}{٧}$ + لطـ $\frac{٧}{٣}$

kaak959@gmail.com gsm 99334198

١ ـ ٢ الدالّة اللوغاريتميّة الطبيعيّة ومعكوسها

يبيّن التمثيل البياني أدناه دالة اللوغاريتم الطبيعي د (س) = لـط س

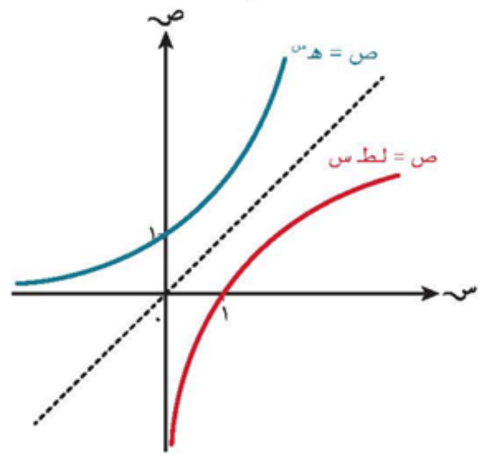


قيمة س	قيمة لـط س	ماذا يعني هذا؟
س > ٠	ليس لها وجود	لـط س غير معرفة لقيم س السالبة
س = ٠	ليس لها وجود	لـط س غير معرفة عند س = ٠
٠ < س < ١	لـط س < ٠	كلما اقتربت قيمة س من الواحد اقتربت قيمة لـط س من ٠
س = ١	لـط س = ٠	لـط ١ = ٠
س > ١	لـط س > ٠	كلما زادت قيمة س تزيد قيمة لـط س

لاحظ أن المنحنى لا يلامس ولا يقطع المحور الصادي أبدًا. يبيّن هذا الأمر إحدى أهم خصائص دالة اللوغاريتم الطبيعي، وهي أن الدالة معرفة لقيم س > ٠ فقط.

يلخص الجدول أدناه هذه الخاصية وخصائص أخرى لدالة اللوغاريتم الطبيعي.

التمثيل أدناه لمنحنيَي ص = هـ^{س} ، ص = لـط س



kaah959@gmail.com gsm 99334198

١ ـ ٢ الدالّة اللوغاريتميّة الطبيعيّة ومعكوسها

نتيجة ٣

بالنسبة إلى الأساس هـ:

- إذا كان د (س) = هـ^{س} ، فإن د$^{-١}$ (س) = لـط س
- إذا كان ف(س) = لـط س ، فإن ف$^{-١}$ (س) = هـ^{س}

مثال

أوجد معكوس كل من هاتين الدالتين:

أ ع (س) = هـ^{٢س}

ب د (س) = لـط ٥س

haah959@gmail.com gsm 99334198

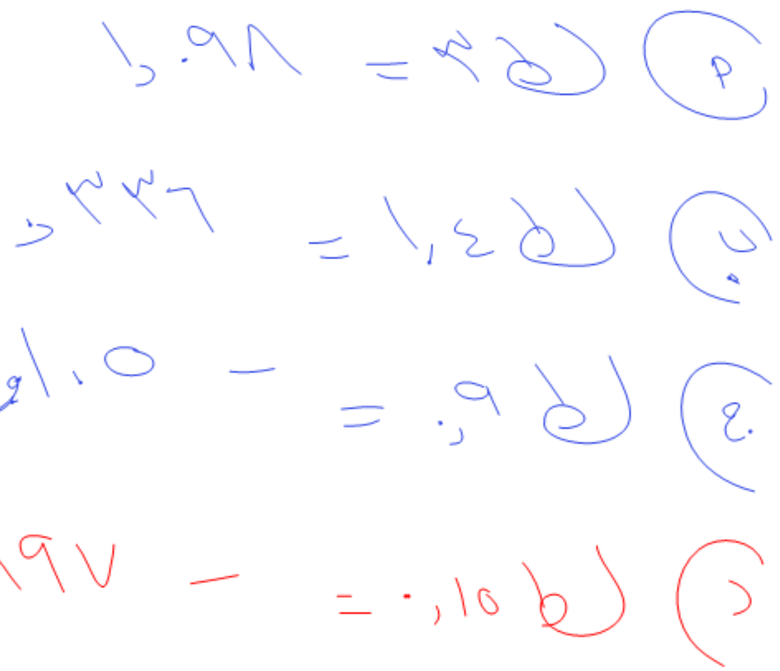
١ ـ ٢ الدالّة اللوغاريتميّة الطبيعيّة ومعكوسها

١) استخدم الحاسبة لإيجاد القيم الآتية مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

أ لط ٣ ب لط ١,٤ ج لط ٠,٩

د لط ٠,١٥ هـ لط $\frac{٩}{٧}$





kaak959@gmail.com gsm 99334198

١ ـ ٢ الدالّة اللوغاريتميّة الطبيعيّة ومعكوسها

٢) دون استخدام الحاسبة، أوجد:

أ) هـ^لط٢

ب) هـ^٥لط٦

ج) هـ^٢لط٣

د) هـ^(١/٢)لط٤٩

هـ) هـ^لط٣+لط٧

kash959@gmail.com gsm 99334198

١ ـ ٢ الدالّة اللوغاريتميّة الطبيعيّة ومعكوسها

٣) دون استخدام الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل ممّا يأتي:

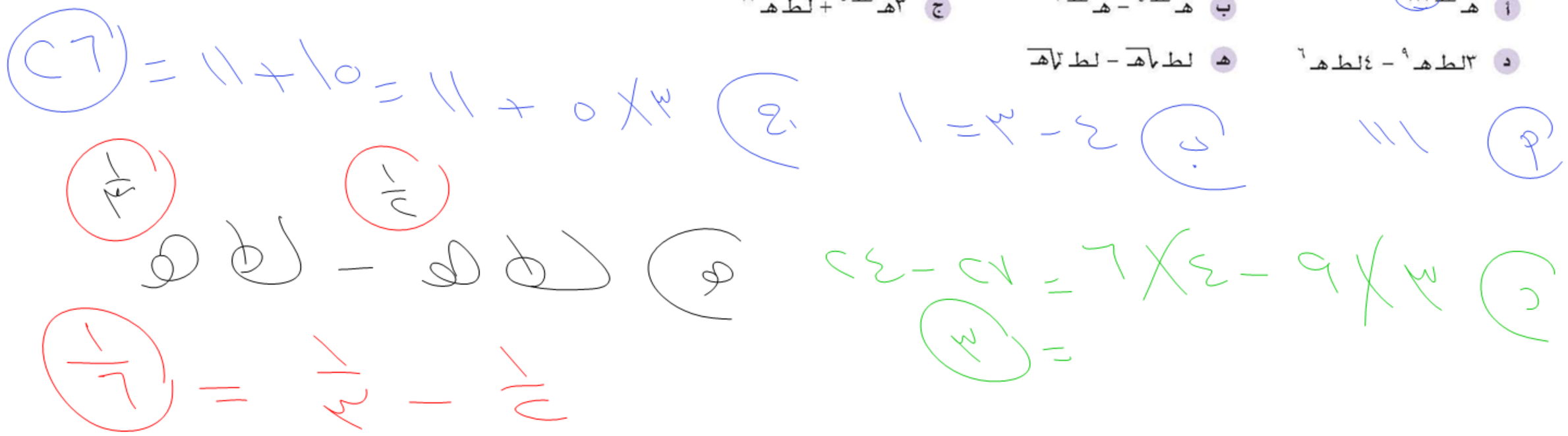
أ) هـ لطـ ١١١

ب) هـ لطـ ٤ − هـ لطـ ٣

ج) ٣هـ لطـ ٥ + لطـ هـ ١١

د) ٣لطـ هـ ٩ − ٤لطـ هـ ٦

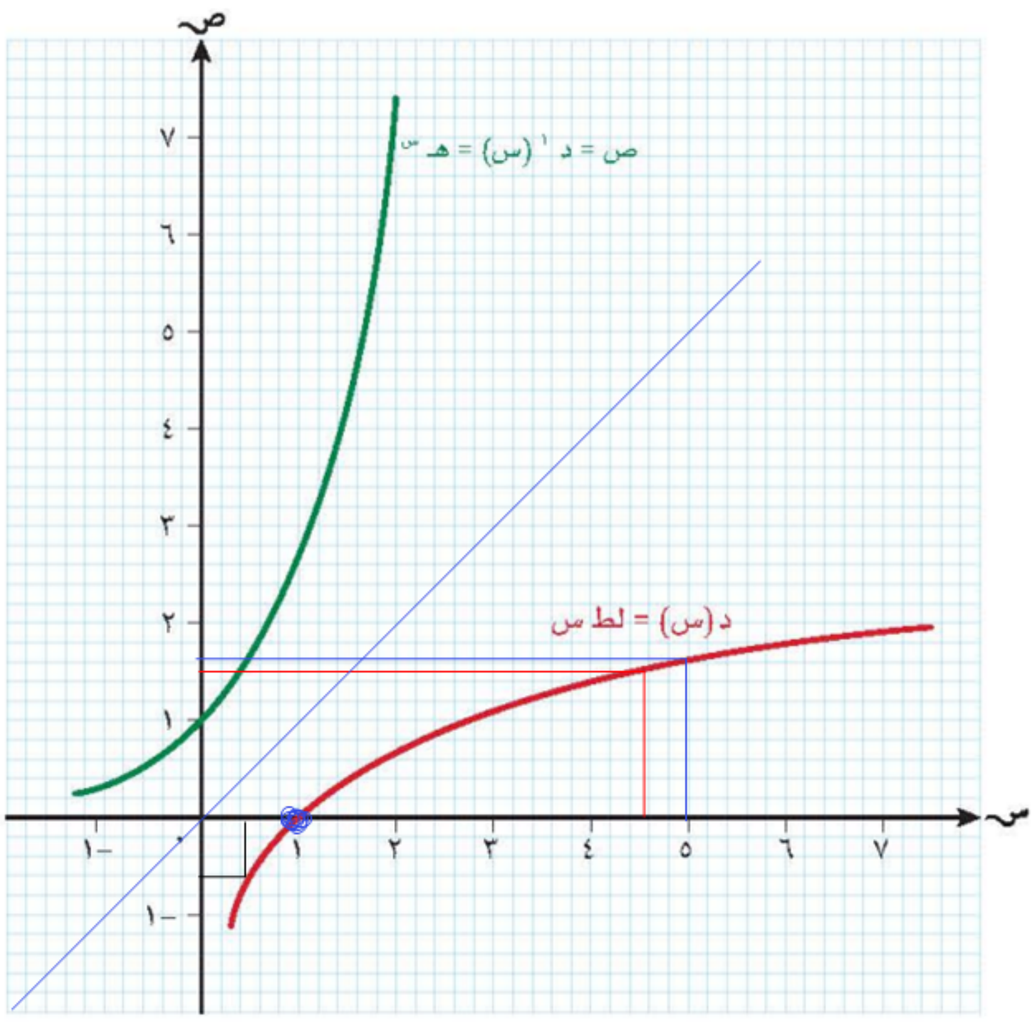
هـ) لطـ √هـ − لطـ ٣√هـ



kaak959@gmail.com gsm 99334198

١ ـ ٢ الدالّة اللوغاريتميّة الطبيعيّة ومعكوسها

٤) يمثل التمثيل البياني الآتي منحنيي د (س) = لط س ومعكوسها د$^{-١}$ (س) = هـ^{س}



أ) استخدم المنحنيَين لتقدير قيمة كل من الآتي مقربًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية واحدة:

١) لط ٤,٥ ٢) لط $\frac{١}{٢}$ ٣) لط ١٢٥ ٤) هـ-لط ١

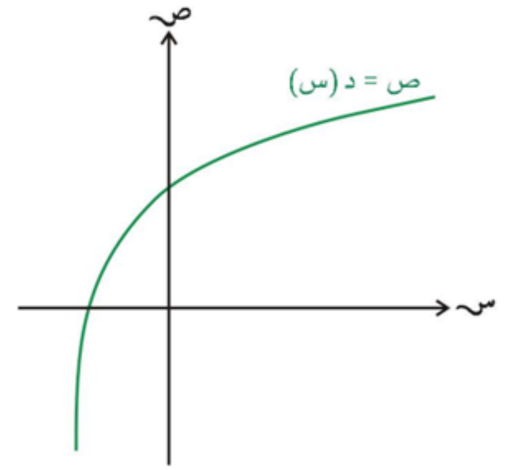
ب) أُضيف مستقيم إلى التمثيل البياني أعلاه بحيث يمكن استخدامه لعكس منحنى ص = لط س حتى يقع على منحنى ص = هـ^{س}

ما هي معادلة هذا المستقيم؟

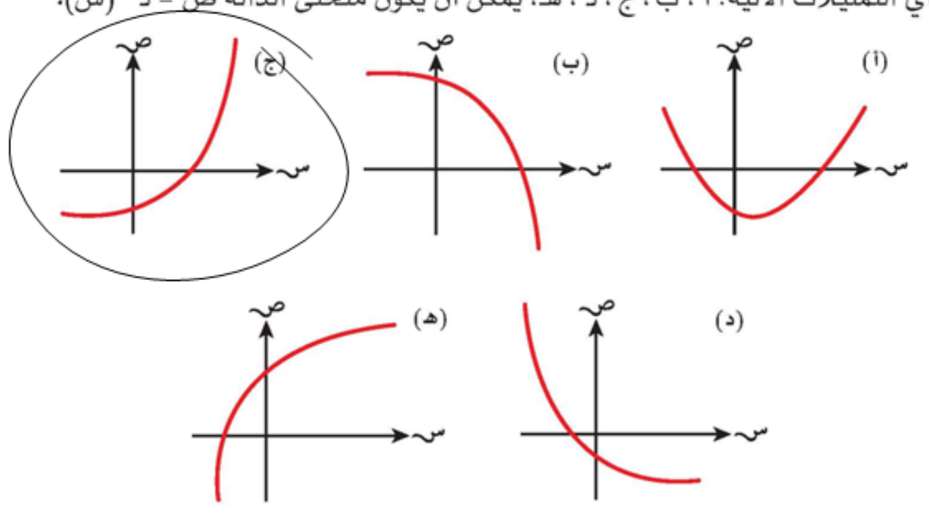
kaak959@gmail.com gsm 99334198

١ ـ ٢ الدالّة اللوغاريتميّة الطبيعيّة ومعكوسها

٥) التمثيل البياني الآتي لمنحنى الدالة ص = د (س)



أ أي التمثيلات الآتية: أ ، ب ، ج ، د ، هـ، يمكن أن يكون منحنى الدالة ص = د$^{-١}$ (س)؟



ب الدالة المبيّنة في التمثيل الأول هي د (س) = ٥ لط (س + ١٠)

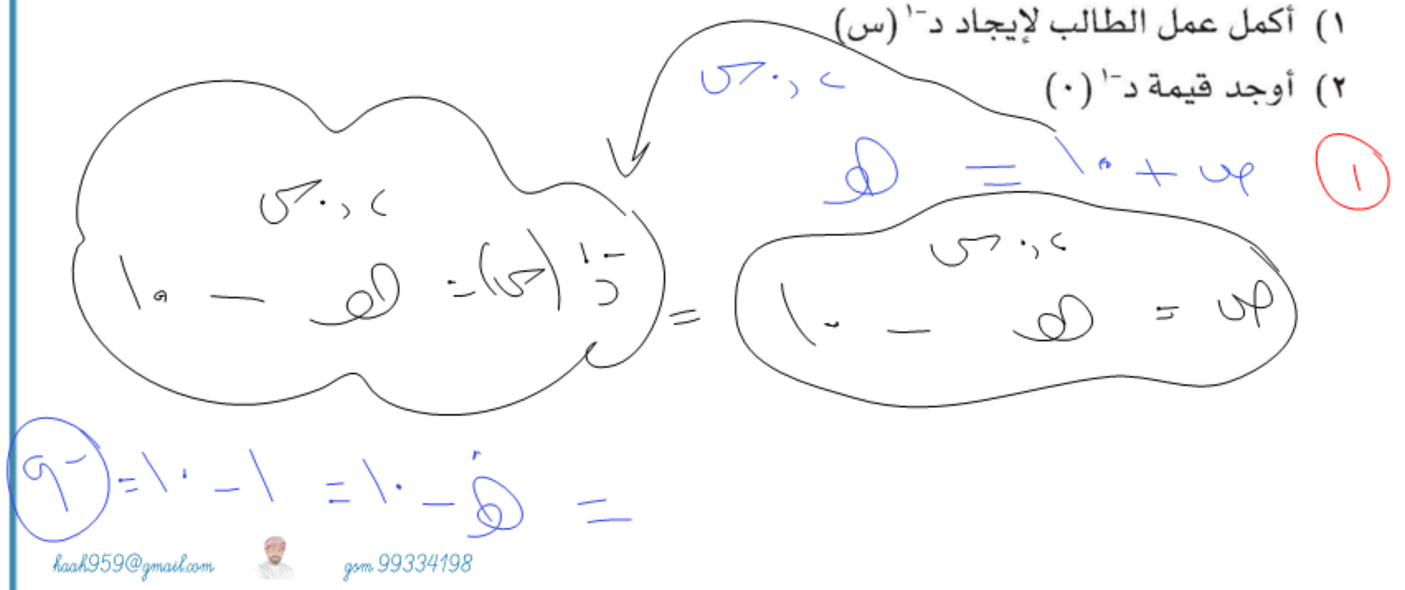
يرغب أحد الطلبة في إيجاد معكوس الدالة د

تشكل الأسطر الأربعة الآتية الخطوات الأولى من الحل الذي كتبه، وهي خطوات صحيحة:

- د(س) = ٥ لط (س + ١٠) — اكتب ص مكان د (س)
- ص = ٥ لط (س + ١٠) — بدّل ما بين س ، ص
- س = ٥ لط (ص + ١٠) — اقسم الطرفَين على ٥
- ٠,٢س = لط (ص + ١٠) — إذا كان أ = ب، فإن هـ^{أ} = هـ^{ب}
- هـ^{٠,٢س} = هـ$^{لط (ص + ١٠)}$ — استخدم هـ$^{لط س}$ = س

١) أكمل عمل الطالب لإيجاد د$^{-١}$ (س)

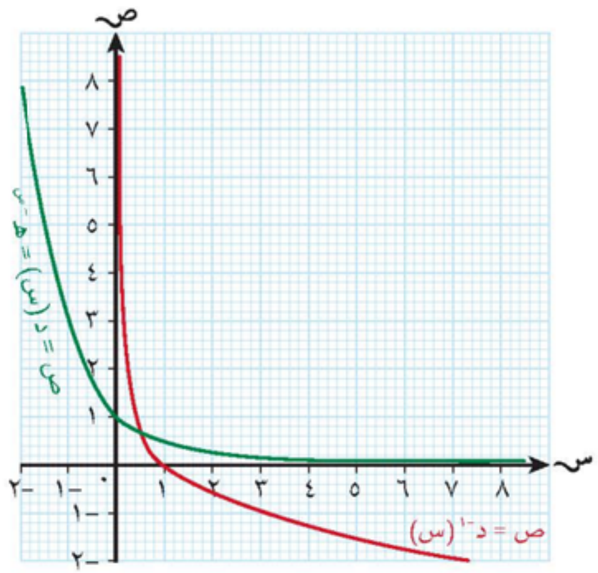
٢) أوجد قيمة د$^{-١}$ (٠)



kaah959@gmail.com gsm 99334198

١ ـ ٢ الدالّة اللوغاريتميّة الطبيعيّة ومعكوسها

٦) التمثيل البياني الآتي رسم دقيق لجزء من منحنى الدالة ص = د (س) = هـ$^{-س}$ ، وجزء من منحنى معكوسها ص = د$^{-١}$ (س)



يرغب أحد الطلبة في إيجاد معكوس الدالة فكتب:

د(س) = هـ$^{-س}$ اكتب ص مكان د (س)

ص = هـ$^{-س}$ بدّل ما بين س ، ص

س = هـ$^{-ص}$ إذا كان أ = ب، فإن لط أ = لط ب

لط س = لط هـ$^{-ص}$

أ) أكمل خطوات عمل الطالب وحدد من الخيارات الآتية الخيار الذي يشكل الطريقة الصحيحة لكتابة معادلة معكوس الدالة:

١) د$^{-١}$ (س) = $\frac{١}{\text{لط س}}$

٢) د$^{-١}$ (س) = − لط س

٣) د$^{-١}$ (س) = لط (−س)

٤) د$^{-١}$ (س) = لط $\frac{١}{س}$

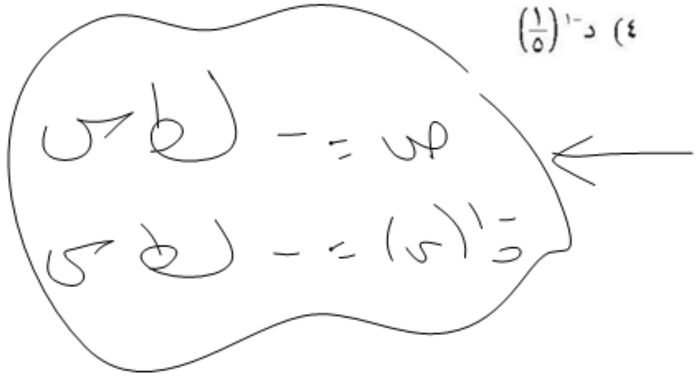
ب) استخدم المنحنيَين في التمثيل البياني لتقدير القيم الآتية، مقرّبة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة:

١) د(−١,٥)

٢) هـ$^{-٠,٢}$

٣) −لط ٨

٤) د$^{-١}$ $\left(\frac{١}{٥}\right)$



١ ـ ٢ الدالّة اللوغاريتميّة الطبيعيّة ومعكوسها

٧) أوجد معكوس كل من الدوال الآتية:

أ) د(س) = $\frac{١}{٣}$ لط س

ب) ف(س) = لط $س^{٢}$

ج) ح(س) = ٥ $هـ^{س}$

د) ك(س) = $هـ^{س-٢}$

هـ) م: س ← $\frac{١}{٢}$ $هـ^{٥س}$

و) د(س) = لط س + لط ٤

ز) ع(س) = لط $س^{٢}$ + لط س − لط $\frac{١}{٨}$

kash959@gmail.com gsm 99334198

١ ـ ٢ الدالّة اللوغاريتميّة الطبيعيّة ومعكوسها

٧) أوجد معكوس كل من الدوال الآتية:

أ) د(س) = $\frac{١}{٣}$ لطـ س

ب) ف(س) = لطـ $س^{٢}$

ج) ح(س) = ٥ $هـ^{س}$

د) ك(س) = $هـ^{س-٢}$

هـ) م: س ← $\frac{١}{٢}$ $هـ^{٥س}$

و) د(س) = لطـ س + لطـ ٤

ز) ع(س) = لطـ $س^{٢}$ + لطـ س − لطـ $\frac{١}{٨}$

kash959@gmail.com gsm 99334198

١ ـ ٢ الدالّة اللوغاريتميّة الطبيعيّة ومعكوسها

مسائل اختبارات

د (س) = لـط س – لـط ٥

أوجد د$^{-١}$(س)

د(س) = هـ$^{س - ٥}$

أوجد معكوس د(س)

$$د^{-١}(س) = ٥ + لـ(س)$$

$$د^{-١}(س) = ٥ هـ^{س}$$

kaah959@gmail.com gsm 99334198