

الوحدة الثانية

التفاضل

٢ ـ ٤ المشتقّة الثانية

القناة على اليوتيوب باسم: الأستاذ حمد الرديني

haah959@gmail.com gsm 99334198



عند إيجاد مشتقة ص بالنسبة إلى س، نحصل على $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

تسمى $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ **المشتقة الأولى** first derivative لـ ص بالنسبة إلى س

وإذا أوجدنا مشتقة $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ بالنسبة إلى س، نحصل على $\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)$، والتي نكتبها عادة على الشكل $\frac{\text{د}^٢ \text{ص}}{\text{د س}^٢}$

وباستخدام ترميز الدوال يكون رمز المشتقة الأولى هو د′(س) والمشتقة الثانية هو د″(س)

تسمى كل من $\frac{\text{د}^٢ \text{ص}}{\text{د س}^٢}$، د″(س) **المشتقة الثانية** second derivative لـ ص بالنسبة إلى س

مثال

إذا كانت ص = د(س) = ٢س^٣ − $\frac{١}{٢}$ س^٢ + ٧س − ١١

أ أوجد د′(س)

ب أوجد د″(س)

ج عند س = −١:

١) أوجد قيمة المشتقة الأولى.

٢) حدّد ما إذا كانت قيمة المشتقة الثانية موجبة أو سالبة.

(أ) د′(س) = ٦س^٢ − س + ٧

(ب) د″(س) = ١٢س − ١

(ج) ١) س = −١

د′(−١) = ٦(−١)^٢ − (−١) + ٧ = ١٤

٢) د″(س) = ١٢س − ١

د″(−١) = ١٢(−١) − ١ = −١٢ − ١ = −١٣

∴ سالبة

kash959@gmail.com gsm 99334198

مثال

أوجد قيمة س التي تجعل المشتقة الثانية للدالة د(س) = ٧س^{٣} + ٢س^{٢} − ٥ س + ١ تساوي ١١

د(س) = ٧ × ٣ س^{٢} + ٢ × ٢ س − ٥

= ٢١ س^{٢} + ٤ س − ٥

د′(س) = ٢١ × ٢ س + ٤

= ٤٢ س + ٤ = ١١

٤٢ س = ١١ − ٤

$\frac{٤٢ س}{٤٢} = \frac{٧}{٤٢}$

∴ $س = \frac{١}{٦}$

١) أوجد المشتقة الثانية لكل ممّا يأتي:

أ ص = ٤س^{٣} − ٣س^{٢} − ٩س + ٦

د(س) = ٤ × ٣ س^{٢} − ٣ × ٢ س − ٩

= ١٢ س^{٢} − ٦ س − ٩

د′(ص) = ١٢ × ٢ س − ٦

= ٢٤ س − ٦

kash959@gmail.com gsm 99334198

١) أوجد المشتقة الثانية لكل ممّا يأتي:

أ) ص = ٤س^{٢} − ٣س^{٢} − ٩س + ٦

ب) ص = $\frac{٢}{٣}$ س^{٢} + $\frac{٥}{٢}$ س^{٢} − ١٥

ج) ص = ٢٠ − ٧س + ٣س^{٢} − ٨س^{٣}

د) ص = ٢س^{٢} + ٧س − ٣

هـ) د(س) = $\frac{٥}{٦}$ س^{٢} + ١٧س

و) د(س) = ١ − $\frac{٣}{٨}$ س^{٤} + س^{٥}

ز) د(س) = $\frac{١٠}{س}$

ح) د(س) = (٣س^{٢} − ٢س + ٦)(س + ٤)

ب) د′(س) = ٣س^{٢} − ٥س + ٤

د″(س) = ٦س − ٥

ج) د(س) = ٤س^{٣} − ٣س^{٢} − ٩س + ٦

د′(س) = ١٢س^{٢} − ٦س − ٩

د″(س) = ٢٤س − ٦

د) د(س) = ٢س^{٢} + ٧س − ٣

د′(س) = ٤س + ٧

د″(س) = ٤

هـ) د(س) = $\frac{٥}{٦}$ س^{٢} + ١٧س

د′(س) = $\frac{٥}{٣}$ س + ١٧

د″(س) = $\frac{٥}{٣}$

و) د(س) = ١ − $\frac{٣}{٨}$ س^{٤} + س^{٥}

د′(س) = −$\frac{٣}{٢}$ س^{٣} + ٥س^{٤}

د″(س) = −$\frac{٩}{٢}$ س^{٢} + ٢٠س^{٣}

ز) د(س) = $\frac{١٠}{س}$ = ١٠س$^{-١}$

د′(س) = −١٠س$^{-٢}$

د″(س) = ٢٠س$^{-٣}$ = $\frac{٢٠}{س^{٣}}$

ح) د(س) = (٣س^{٢} − ٢س + ٦)(س + ٤)

= ٣س^{٣} + ١٠س^{٢} − ٧س + ٢٤

د′(س) = ٩س^{٢} + ٢٠س − ٧

د″(س) = ١٨س + ٢٠

kash959@gmail.com gsm 99334198

٢) إذا كان د(س) = س^{٣} + ٢س^{٢} + ٣س + ٤، فأوجد قيمة:

أ د(٢) = ٢^{٣} + ٢(٢)^{٢} + ٣(٢) + ٤ = ٢٦

ب د′(٢)

ج د″(٢)

ب) د′(س) = ٣س^{٢} + ٤س + ٣

د′(٢) = ٣(٢)^{٢} + ٤(٢) + ٣

= ٣٤

ج) د″(س) = ٦س + ٤

د″(٢) = ٦(٢) + ٤

= ١٢ + ٤ = ١٦

٣) أوجد قيمة س التي تجعل المشتقة الثانية للدالة:

أ د(س) = ٨س^{٣} + ٥س^{٢} − ١٢س + ٢ تساوي ٢٦

ب د(س) = $\frac{٣}{٤}$ س^{٣} + ٨س^{٢} تساوي ١٠

ج د(س) = ٦ س^{٣} − ٣س^{٢} + س مساوية للمشتقة الثانية للدالة
ف(س) = ٢س + ٨س^{٢} − ٤س^{٣}

أ) د′(س) = ٢٤س^{٢} + ١٠س − ١٢

د″(س) = ٤٨س + ١٠

٤٨س + ١٠ = ٢٦

٤٨س = ١٦

$\frac{٤٨س}{٤٨} = \frac{١٦}{٤٨}$ ∴ س = $\frac{١}{٣}$

kaah959@gmail.com gsm 99334198

٣) أوجد قيمة س التي تجعل المشتقة الثانية للدالة:

أ) د(س) = ٨س^{٢} + ٥س^{٢} − ١٢س + ٢ تساوي ٢٦

ب) د(س) = $\frac{٣}{٤}$ س^{٢} + ٨س^{٢} تساوي ١٠

ج) د(س) = ٦ س^{٢} − ٣س^{٢} + س مساوية للمشتقة الثانية للدالة
ف(س) = ٢س + ٨س^{٢} − ٤س^{٢}

ب) د(س) = $\frac{٣}{٤}$ × ٣س^{٢} + ١٦س

د(س) = $\frac{٩}{٤}$ س^{٢} + ١٦س

د'(س) = $\frac{٩}{٤}$ × ٢س + ١٦

د'(س) = ١٠ = $\frac{٩}{٢}$ س + ١٦

$\frac{٩}{٢}$ س = ١٠ − ١٦

$\frac{٩}{٢}$ س = −٦

س = $\frac{-٦}{\frac{٩}{٢}}$ = $\frac{-١٢}{٩}$ = $-١\frac{٣}{٩}$ = $-١\frac{١}{٣}$

ج) د'(س) = ١٨س^{٢} − ٦س + ١

د''(س) = ٣٦س − ٦

ف(س) = ٢ + ٨س − ٤س^{٢}

ف'(س) = ٨ − ٨س

ف''(س) = −٨

∴ ٣٦س − ٦ = −٨

٣٦س = −٨ + ٦

٣٦س = −٢

س = $\frac{-٢}{٣٦}$ = $\frac{-١}{١٨}$

kaah959@gmail.com gsm 99334198

٤) قيمة المشتقة الثانية للدالة ص = ٧س^{٣} − أ س^{٢} + ٥ س تساوي ٤ عند س = ٢

أوجد قيمة الثابت أ

د(س) = ٢١ س^{٢} − ٢أ س + ٥

د′(س) = ٤٢ س − ٢أ

س = ٢ ⟸ ٤ = ٨٤ − ٢أ

٢أ = ٨٤ − ٤ = ٨٠

أ = ٤٠

٥) قيمة المشتقة الثانية للدالة د(س) = ٣٠ − ٢س + ٣س^{٢} − س^{٣} تساوي ٨ عند س = أ، أوجد:

أ قيمة الثابت أ

ب ميل المنحنى د(س) = ٣٠ − ٢س + ٣س^{٢} − س^{٣} عند النقطة حيث س = ٣أ

د′(س) = −٣س^{٢} + ٦س − ٢

د″(س) = −٦س + ٦

د″(أ) = ٨ ⟸ −٦أ + ٦ = ٨

−٦أ = ٨ − ٦ = ٢

$\frac{-٦أ}{-٦} = \frac{٢}{-٦}$

أ = $-\frac{١}{٣}$

س = ٣أ = ٣ × $-\frac{١}{٣}$ = −١

د(−١) = −٣(−١)^{٣} + ٦(−١) + ٢ = −١١

kash959@gmail.com gsm 99334198

ملاحظة
① المشتقة الأولى هي ة
① المسافة ② السرعة
② المشتقة الثانية هي ة
① التسارع ② العجلة

٦) يمكن حساب المسافة التي قطعها جزيء انطلاقًا من نقطة البداية ص متر، من خلال الصيغة $ص = ٢س + ١٥س^{٢} - \frac{٢}{٣}س^{٣}$، حيث س يمثل الزمن بالثواني.

أ كم يبعد الجزيء عن نقطة البداية بعد ٣ ثوانٍ؟

ب تعطي المشتقة الثانية $\left(\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}\right)$ صيغة لتسارع الجزيء عند أية نقطة خلال رحلته، أوجد:

١) تسارع الجزيء.

٢) تسارع الجزيء بعد ٥ ثوانٍ.

$د(س) = ٢ + ٣٠س - ٤س^{٢}$ ① $\frac{د ص}{د س} = ٢ + ٣٠س - ٤س^{٢}$

$\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} = -٣٠ - ٤س$ ①

$|\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}| = |-٣٠ - ٤ \times ٥| = |-٣٠ - ٢٠| = ١٠$ ②

$د(٣) = ٢ + ٣٠(٣) - ٤(٣)^{٢} = ٢ + ٩٠ - ٣٦ = ٥٦$ ③

kaah959@gmail.com gsm 99334198